Nichtlineare Optimierung
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Irwin Yousept
Hannes Meinlschmidt

WS 2012/13
24.1.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (KKT-Bedingungen)
Gegeben seien die folgenden Optimierungsprobleme:

$$\begin{aligned} \max \quad & 2x_1 + 3x_2 \\ & x_1 + x_2 \leq 8 \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + 2x_2 \leq 4 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(P1)} \qquad \begin{aligned} \min \quad & (x_1 - 9/4)^2 + (x_2 - 2)^2 \\ & x_2 - x_1^2 \geq 0 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 \leq 6 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned} \qquad \text{(P2)}$$

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für (P1). Skizzieren Sie weiterhin die zulässige Menge und zeichnen Sie in den Eckpunkten jeweils den Gradienten der Zielfunktion und die Gradienten der in der Ecke aktiven Nebenbedingungen ein. Überprüfen Sie nun für jeden Eckpunkt, ob die KKT-Bedingungen gelten, sowohl rechnerisch als auch an der Zeichnung. Geben Sie eine globale Lösung des Problems (P1) an.

(b) Formulieren Sie auch die KKT-Bedingungen für (P2) und überprüfen Sie, ob diese im Punkt $x^* = (3/2, 9/4)$ erfüllt sind. Wie sind die KKT-Bedingungen in x^* geometrisch zu verstehen? Gilt Ihre Interpretation allgemein für Probleme, die nur durch Ungleichungen restringiert sind?

Aufgabe G2 (Constraint Qualifications)
Die Menge $Z \subseteq \mathbb{R}^2$ sei durch folgende Ungleichungen bestimmt:

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 \leq 2, \qquad (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2 \leq 2, \qquad x_1 \geq 0.$$

Zeigen Sie, dass in $\bar{x} = (0, 0)$ die Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification (MFCQ) erfüllt ist, die Linear Independence Constraint Qualification (LICQ) jedoch verletzt ist.

Aufgabe G3 (Trust-Region und KKT)
Gegeben sei die quadratische Funktion

$$q(s) = c^T s + \frac{1}{2} s^T H s, \qquad \text{mit } H \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ symmetrisch und } c \in \mathbb{R}^n,$$

und für $\Delta > 0$ das wohlbekannte Trust-Region-Problem

$$\min q(s) \quad \text{s.t.} \quad \|s\|_2 \leq \Delta. \tag{TP}$$

Wir haben bereits die Optimalitätsbedingungen für (TP) kennengelernt, siehe Vorlesung bzw. Satz 14.12 im Buch, oder Aufgabe H3 vom achten Übungsblatt. Hier sollen diese nochmals mit KKT-Theorie erarbeitet werden. Sei dazu $\bar{s} \in \mathbb{R}^n$ eine globale Lösung des Trust-Region-Problems (TP).

(a) Zeigen Sie, dass es ein $\bar{\lambda} \geq 0$ gibt, so dass die Bedingungen
   i. $(H + \bar{\lambda} I)\bar{s} = -c$,
   ii. $(\|\bar{s}\|_2 - \Delta)\bar{\lambda} = 0$, d.h. entweder ist $\|\bar{s}\|_2 = \Delta$ oder es gilt $\|\bar{s}\|_2 < \Delta$ und $\bar{\lambda} = 0$,

   erfüllt sind.
   Hinweis: Verwenden Sie die Nebenbedingung $\frac{1}{2}\|s\|_2^2 \leq \frac{1}{2}\Delta^2$ statt $\|s\|_2 \leq \Delta$. Auch Aufgabe G3 von Blatt 10 könnte sich als hilfreich erweisen.

(b) Zeigen Sie, dass $(H + \bar{\lambda} I)$ mit dem $\bar{\lambda}$ aus Teilaufgabe (a) positiv semidefinit ist.
   Hinweis: Betrachten Sie $L(s, \bar{\lambda}) - L(\bar{s}, \bar{\lambda})$ für zulässige $s \in \mathbb{R}^n$.

Hausübung

Aufgabe H1 (Slater Constraint Qualification) (6 Punkte)
Gegeben sei das konvexe Optimierungsproblem

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) \leq 0, \tag{KP}$$

mit $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und $c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ jeweils konvex und stetig differenzierbar. Die sogenannte *Slater-Bedingung* lautet: Es existiert einen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$ mit $c(y) < 0$, d.h. ein innerer Punkt des zulässigen Bereiches.

(a) Zeigen Sie, dass die angegebene Slater-Bedingung die Mangasarian-Fromowitz Constraint Qualification (MFCQ) für jeden zulässigen Punkt von (KP) impliziert.

(b) Zeigen Sie anhand eines Gegenbeispiels, dass die Aussage aus Teilaufgabe (a) für nichtkonvexe Nebenbedingungen im Allgemeinen nicht gilt. Konstruieren Sie dazu ein Optimierungsproblem mit (mindestens) einer nichtkonvexen Nebenbedingung, sodass die Slater-Bedingung erfüllt ist, es aber trotzdem einen zulässigen Punkt gibt, der (MFCQ) verletzt.

Prüfen Sie, ob für Ihr Gegenbeispiel dennoch (ACQ) gilt. Modifizieren Sie Ihr Gegenbeispiel gegebenenfalls so, dass auch (ACQ) trotz Slater-Bedingung nicht gilt.

Aufgabe H2 (KKT-Bedingungen für Spezialfälle) (4 Punkte)
Wir betrachten das allgemeine Optimierungsproblem

$$\min f(x) \quad \text{s.t.} \quad c(x) \leq 0$$

für $c: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ jeweils stetig differenzierbar.

(a) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für den Fall, dass der Optimalpunkt $\bar{x}$ im Inneren des zulässigen Bereichs $Z = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) \leq 0\}$ liegt. Gilt (ACQ)? Was beobachten Sie (Stichwort Verallgemeinerung bekannter Aussagen)?

(b) Formulieren Sie die KKT-Bedingungen für den Fall, dass f linear und c affin-linear ist. Kommen Ihnen diese Bedingungen bekannt vor und wenn ja, woher?

Aufgabe H3 (Optimalitätsbedingungen für zweistufige Optimierung) (6 Punkte)
Gegeben seien stetig differenzierbare Funktionen $f_1, \dots, f_p, h_1, \dots, h_m$, jeweils $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Betrachen Sie folgendes Optimierungsproblem, wobei wir die h_i wie immer zu h zusammenfassen:

$$\min_x \max \left\{ f_1(x), \dots, f_p(x) \right\} \quad \text{s.t.} \quad h(x) = 0. \tag{P}$$

(a) Zeigen Sie, dass Problem (P) äquivalent zu folgendem Problem ist:

$$\begin{aligned} \min_{(x,z)} \quad & z \\ \text{s.t.} \quad & h(x) = 0 \\ & f_j(x) \leq z \quad j = 1, \dots, p. \end{aligned} \tag{P'}$$

Wo liegen die Unterschiede der beiden Optimierungsprobleme?

(b) Sei $\bar{x}$ ein Optimalpunkt von (P), und seien die Gradienten $\nabla h_i(\bar{x}) \in \mathbb{R}^n$ für $i \in \{1, \dots, m\}$ linear unabhängig. Zeigen Sie, dass dann Vektoren $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_p)^T \in \mathbb{R}^p$ und $\bar{\mu} = (\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_m)^T \in \mathbb{R}^m$ existieren, so dass gilt:

$$\sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j \nabla f_j(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\mu}_i \nabla h_i(\bar{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \bar{\lambda} \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{p} \bar{\lambda}_j = 1, \tag{1}$$

$$\text{für alle } j \in \{1, \dots, p\} \text{ gilt:} \quad \bar{\lambda}_j > 0 \quad \Rightarrow \quad f_j(\bar{x}) = \max \left\{ f_1(\bar{x}), \dots, f_p(\bar{x}) \right\}. \tag{2}$$