Nichtlineare Optimierung
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Irwin Yousept
Hannes Meinlschmidt

WS 2012/13
17.1.2013

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Zum Warmwerden: Abhängigkeit des Linearisierungskegels von der Darstellung)
Es sei die Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ gegeben durch $M = \left\{(x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\right\}$. Diese kann man mit $h(x) = x_2$ und $\hat{h}(x) = x_2^2$ jeweils darstellen durch

$$M = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : h(x) = 0\right\} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \hat{h}(x) = 0\right\}.$$

Berechnen Sie $T_l(h, x)$, $T_l(\hat{h}, x)$ und $T(M, x)$. Welche der Mengen sind gleich, welche nicht? Welche Inklusionen gelten dann?

Aufgabe G2 (Tangentialkegel)
In dieser Aufgabe untersuchen wir die Definition des Tangentialkegels einer Menge M im Punkt $x \in M$, d.h.

$$T(M, x) := \left\{d \in \mathbb{R}^n : \exists (t_k) \subset \mathbb{R}^+, (x^k) \subset M : \lim_{k\to\infty} t_k = 0, \lim_{k\to\infty} x^k = x, \lim_{k\to\infty} (x^k - x)/t_k = d\right\},$$

genauer.

(a) Sei eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ mit nichtleerem Inneren $\mathring{M}$ gegeben (sei z.B. M selbst offen). Zeigen Sie, dass $T(M, x) = \mathbb{R}^n$ für alle $x \in \mathring{M}$ gilt. Was ergibt sich mit dem Satz über notwendige Optimalitätsbedingungen über den Tangentialkegel (Satz 16.3 im Buch)? Wie steht es mit Constraint Qualifications in $x \in \mathring{M}$?

(b) Zeigen Sie, dass sich der Tangentialkegel äquivalent als

$$T(M, x) := \left\{d \in \mathbb{R}^n : \exists (t_k) \subset \mathbb{R}^+, (d^k) \subset \mathbb{R}^n : \lim_{k\to\infty} t_k = 0, \lim_{k\to\infty} d^k = d, x + t_k d^k \in M\right\}$$

schreiben lässt.

(c) Zeigen Sie, dass sich der Tangentialkegel äquivalent als

$$T(M, x) := \overline{\{d \in \mathbb{R}^n : \exists \alpha > 0 : x + \alpha d \in M\}}$$

schreiben lässt, wenn M konvex ist (hier ist $\overline{X}$ der Abschluss von X).

(d) Schließlich rechtfertigen wir noch den Begriff *Tangential*kegel. Zeigen Sie dazu, dass der Tangentialkegel nochmals äquivalent durch

$$T(M, x) := \left\{d \in \mathbb{R}^n : \exists \sigma > 0, (t_k) \subset \mathbb{R}^+ : \lim_{k\to\infty} t_k = 0, r_k : (-\sigma, \sigma) \to \mathbb{R}^n, \lim_{k\to\infty} r_k(t_k)/t_k = 0, x + t_k d + r_k(t_k) \in M\right\}$$

gegeben ist. In diesem Sinne liegt $d \in T(M, x)$ also im Tangentialraum von M in x.

(e) Wer sich ein wenig mit Differentialgeometrie auskennt oder interessiert ist: Zeigen Sie unter passenden Annahmen an M (die müssen nicht konkret sein), dass der Tangentialraum von M in x auch Teilmenge von $T(M, x)$ ist.

Aufgabe G3 (Kugelei)
Sei $K = \overline{B_r(0)} \subset \mathbb{R}^n$ eine abgeschlossene Kugel mit Mittelpunkt im Ursprung und Radius $r > 0$. Wir umschreiben $x \in K$ durch $c(x) \leq 0$ mit $c(x) = x^T x - r^2$. Zeigen Sie, dass dann gilt:

$$T_l(c, x) = T(K, x). \tag{1}$$

Hinweis: Benutzen Sie, dass das Problem invariant unter linearen Transformationen, inbesondere also Skalierungen und Rotationen, ist. Es ist also ausreichend, (1) für die Einheitskugel $\overline{B_1(0)}$ und einen freundlichen Punkt $x \in \overline{B_1(0)}$ zu zeigen. Zudem kann man das Koordinatensystem so drehen, dass ein gegebener Tangentialvektor an die Kugel zu einem beliebigen Einheitsvektor wird.

Hausübung

Aufgabe H1 (Tangential- und Linearisierungskegel) (6 Punkte)
Betrachten Sie das Minimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^2} -x_1 \quad \text{s.t.} \quad x_2-(1-x_1)^3 \le 0, \quad -x_1 \le 0, \quad -x_2 \le 0. \tag{1}$$

(a) Ermitteln Sie die Lösung $\bar{x}$ von (1) graphisch.

(b) Bestimmen Sie den Tangentialkegel $T(M,\bar{x})$ und den Linearisierungskegel $T_l(c,\bar{x})$ für $\bar{x}=(1,0)$ und den Zulässigkeitsbereich M. Zeigen Sie, dass keine Constraint Qualification in $\bar{x}=(1,0)$ gelten kann.

(c) Geben Sie zwei (unabhängige) lineare Nebenbedingungen an, sodass das Hinzufügen jeweils einer dieser Bedingungen zu (1) bewirkt, dass im Punkt $\bar{x}=(1,0)$ die Abadie Constraint Qualification (ACQ) erfüllt ist, die zulässige Menge jedoch unverändert bleibt.

Aufgabe H2 (Linearisierung) (6 Punkte)
Seien $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ und $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^p$ jeweils affin-linear, $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ konvex. Wir betrachten das nichtlineare Optimierungsproblem

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \qquad \text{s.t.} \quad g(x)\le 0, \quad h(x)=0. \tag{NLP}$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $T(M,x)=T_l(c,h,x)$ für alle $x\in M$, wobei $M=\{x\in\mathbb{R}^n : g(x)\le 0,\, h(x)=0\}$ die zulässige Menge für (NLP) ist.

(b) Ein Punkt $\bar{x}$ ist genau dann Optimallösung von (NLP), wenn er Optimallösung des in $\bar{x}$ linearisierten Problems

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^T(x-\bar{x}) \qquad \text{s.t.} \quad g(\bar{x})+\nabla g(\bar{x})^T(x-\bar{x})\le 0, \quad h(\bar{x})+\nabla h(\bar{x})^T(x-\bar{x})=0. \tag{LNLP, $\bar{x}$}$$

ist.

Aufgabe H3 (Tangential- und Linearisierungskegel) (3 Punkte)
Betrachten Sie die Funktionen $c,h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, gegeben durch

$$c(x)=x^Tx-1 \quad \text{und} \quad h(x_1,x_2)=\begin{cases} x_1^3\sin\left(\frac{1}{x_1}\right)-x_2 & x_1\neq 0\\ -x_2 & x_1=0,\end{cases}$$

sowie die Menge $M\subset\mathbb{R}^2$, gegeben durch

$$M=\left\{x\in\mathbb{R}^2 : c(x)\le 0, h(x)=0\right\}.$$

Bestimmen Sie Tangential- und Linearisierungskegel von M mit der gegebenen Beschreibung im Punkt 0. Gilt (ACQ)?