Nichtlineare Optimierung
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Irwin Yousept
Hannes Meinlschmidt

WS 2012/13
20.12.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Optimallösungen des Trust-Region-Verfahrens)
Wir betrachten das übliche Trust-Region-Problem für die quadratische Funktion $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$q(s) = c^T s + s^T H s,$$

wobei $H \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und $c \in \mathbb{R}^n$ ist, also

$$\min_s q(s) \quad \text{s.t.}\ \|s\| \le \Delta$$

für ein $\Delta > 0$. In H3 von Blatt 8 haben Sie hinreichende Optimalitätsbedingungen für dieses Problem kennengelernt und (hoffentlich) auch schon benutzt, um eine Lösung eines konkreten Problems zu finden. In dieser Aufgabe soll diese Lösungsmethode allgemein bearbeitet werden. Erfüllt gleich $\lambda = 0$ die Bedingungen mit einem $s \in \mathbb{R}^n$ mit $\|s\| \le \Delta$, so sind wir fertig. Für $\lambda > \max\{0, -\lambda_{\min}(H)\}$ dagegen definieren wir

$$s(\lambda) := -(H + \lambda I)^{-1} c.$$

Um die dritte Bedingung zu erfüllen, versucht man nun, eine Nullstelle $\lambda > 0$ der Funktion

$$\phi(\lambda) := \|s(\lambda)\| - \Delta$$

zu finden. Folgen Sie dazu folgender Anleitung:

(a) Sei $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine orthogonale Matrix, so dass $Q^T H Q = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots \lambda_n)$ gilt, wobei $\lambda_1 \le \dots \le \lambda_n$ die Eigenwerte von H sind. Zeigen Sie, dass für $\lambda \ne -\lambda_i$ (für $i = 1, \dots n$) gilt:

$$\|s(\lambda)\|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{(q_i^T c)^2}{(\lambda_i + \lambda)^2}.$$

(b) Diskutieren Sie die Existenz von Nullstellen $\lambda > \max\{0, -\lambda_1\}$ von ϕ, falls $q_1^T c \ne 0$ und $\lambda_1 < 0$ ist.

Hinweis: Die Betrachtung von $\lim_{\lambda\to\infty} \|s(\lambda)\|$ und $\lim_{\lambda \searrow -\lambda_1} \|s(\lambda)\|$ hilft.

(c) Untersuchen Sie, was passiert, wenn H positiv definit und $\|s(0)\| > \Delta$ ist.

(d) Es gelten die Annahmen aus Aufgabenteil (b). Zur Bestimmung einer Nullstelle von ϕ wenden wir nun das Newton-Verfahren auf ϕ an. Was passiert für λ nahe $-\lambda_1$? Warum ist es geschickter, die Gleichung $\Phi(\lambda) := \frac{1}{\|s(\lambda)\|} - \frac{1}{\Delta} = 0$ zu lösen?

Aufgabe G2 (Spaß mit Projektionen)
Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen, konvex und nicht leer. Wir betrachten in dieser Aufgabe folgendes Problem, wobei $y \in \mathbb{R}^n$ beliebig, aber fest ist:

$$\min \frac{1}{2} \left\|x - y\right\|^2 \quad \text{s.t.} \quad x \in X \tag{P_y}$$

Zeigen Sie:

(a) Das Problem (P_y) hat eine eindeutige Lösung $\bar{x} \in X$.
Bemerkung. Es gibt also einen eindeutigen Vektor $\bar{x} \in X$, so dass $\|\bar{x} - y\| \leq \|x - y\|$ für alle $x \in X$ gilt; d.h. $\bar{x}$ hat den eindeutig kleinsten Abstand zu y. Den Vektor $\bar{x}$ nennt man auch *Projektion von y auf X* und setzt $\mathrm{Proj}_X(y) := \bar{x}$.

(b) Es gilt genau dann $z = \mathrm{Proj}_X(y)$, wenn

$$(z - y)^T(x - z) \geq 0 \quad \text{für alle } x \in X \tag{1}$$

gilt (diese Aussage wird auch *Projektionssatz* genannt).

(c) Die Abbildung $\mathrm{Proj}_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ist Lipschitz-stetig und dabei sogar kontraktiv.

Aufgabe G3 (Mehr Spaß mit Projektionen (und Trust-Region))
Wir betrachten nochmals Problem (P_y) mit gleichen Annahmen wie in der vorigen Aufgabe.

(a) Bestimmen Sie $\mathrm{Proj}_X(y)$ für $X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : a_i \leq x_i \leq b_i : 1 \leq i \leq n\right\}$, wobei $a = (a_1, \ldots, a_n)^T$ und $b = (b_1, \ldots, b_n)^T$ aus $\mathbb{R}^n$ jeweils gegeben seien.

(b) Bestimmen Sie $\mathrm{Proj}_X(y)$ für $X = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|^2 \leq \Delta^2\right\}$ einmal geometrisch, einmal mit der Charakterisierung (1) und einmal mit dem Satz aus Aufgabe H3 von Übungsblatt 8.

(c) Diese Teilaufgabe heißt "Von hinten durch die Brust ins Auge": Wir betrachten nun das übliche Trust-Region-Problem

$$\min q(s) = c^T s + \frac{1}{2} s^T H s \quad \text{s.t. } \|s\| \leq \Delta, \tag{TP}$$

wo $\Delta > 0$ und H symmetrisch positiv definit. Beweisen Sie, dass die Optimalitätsbedingungen aus dem Satz aus Aufgabe H3 von Übungsblatt 8 *hinreichend* sind, indem Sie (TP) auf ein Projektionsproblem transformieren und dafür mit (1) zeigen, dass dessen Lösung das Richtige tut.

(d) Geben Sie eine möglichst explizite Darstellung für die Optimallösung des ℓ_∞-Trust-Region-Problems

$$\min q(s) = c^T s + \frac{1}{2} s^T H s \quad \text{s.t. } \|s\|_\infty \leq \Delta$$

an.
Hinweis: Erste Teilaufgabe.

Hausübung

Aufgabe H1 (Restringierte Optimierung) (∞ Punkte)
Erholen Sie sich gut über die Weihnachtspause. Wiederholen Sie aber trotz aller Erholung und Weihnachtsfeierei den bisherigen Stoff, v.a. unter den Gesichtspunkten

- Welche Verfahren haben wir bearbeitet?
- Was warn die Vorteile/Nachteile der einzelnen Verfahren? Warum haben wir überhaupt so viele Variationen betrachtet?
- Welche Voraussetzungen waren kritisch für die Konvergenz der Verfahren? Welche Art von Aussagen wurden durch die Konvergenzsätze typischerweise gemacht?
- An welchen Stellen scheitern die Verfahren, wenn man die Menge der zulässigen x eingrenzt? Wie könnte man das beheben?
- Wieso habe ich in Hausübungen Punkte abgezogen bekommen und wie könnte ich das besser machen?

Weiterhin möchten vermutlich die Rechnerübungen noch gerne fertigprogrammiert bzw. überarbeitet werden.

Wir wünschen Ihnen

Frohe Weihnachten und ein erfolgreiches Jahr 2013!

Die nächsten Übungen finden am 17. Januar 2013 statt.