Nichtlineare Optimierung
2. Rechnerübungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Irwin Yousept
Hannes Meinlschmidt

WS 2012/13
29.11.2012

Rechnerübung

Aufgabe R1 (Powell-Wolfe-Schrittweitenregel)
Implementieren Sie den Algorithmus aus der Vorlesung zur Berechnung der Powell-Wolfe-Schrittweite. Erstellen Sie dazu eine Funktion

```
[sig] = PowellWolfe(xk,sk,stg,fg,fk,gamma,theta).
```

Ändern Sie Ihr Gradientenverfahren aus der ersten Übung so, dass bei der Wahl von `stepsize = 2` die Powell-Wolfe-Schrittweite gewählt wird. Testen Sie Ihr Verfahren an den Funktionen aus der ersten Rechnerübung.

Aufgabe R2 (Globalisiertes Newton-Verfahren)

(a) Implementieren Sie das globalisierte Newton-Verfahren aus der Vorlesung in Matlab. Verwenden Sie

$$\alpha_1 = 10^{-3}, \quad \alpha_2 = 10^{-1} \quad \text{und} \quad p = 1.$$

Zur Schrittweitenbestimmung bietet sich Ihre Funktion `armijo` aus der ersten Rechnerübung an. Beachten Sie, dass die Schrittweiten-Bestimmung nach Armijo für diesen Algorithmus mit $\gamma \in (0, 1/2)$ statt $\gamma \in (0, 1)$ aufgerufen werden soll (dies garantiert den Übergang zu schneller lokaler Konvergenz!).
Weiterhin müssen die aufgerufenen MATLAB-Funktionen `fg`, die die Funktionswerte und Gradienten der zu minimierenden Funktionen ausgeben, nun auch die Hessematrix liefern, d.h. `[f,g,H] = fg(x)` soll Funktionswert `f`, Gradient `g` und Hessematrix `H` der Funktion `fg` im Punkt x geben.
Verwenden Sie für Ihr Programm wieder einen Eingabeparameter `maxit`, so dass Ihr Verfahren spätestens nach `maxit` Iterationen abbricht.

(b) Testen Sie Ihr Programm an den Funktionen f_1 und f_2 aus der ersten Rechnerübung, sowie

$$f_4(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \quad \text{mit Startwerten } x^0 \in \left\{\pm 2, \pm 0.51, \pm\frac{1}{\sqrt{5}}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (Gauss-Newton-Verfahren) (14 Punkte)

Wir kennen bereits aus der Vorlesung den Algorithmus zur Globalisierung des Newton-Verfahrens für Minimierungsprobleme. Die Globalisierung des Newton-Verfahrens für *Gleichungssysteme* $F(x) = 0$ mit einer zwei mal stetig differenzierbaren Funktion $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfolgt üblicherweise auf Basis der Minimierung einer Energiefunktion für F, nämlich

$$\min_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{2} F(x)^T F(x). \tag{1}$$

In dieser Aufgabe untersuchen wir dieses Verfahren genauer.

(a) Bestimmen Sie die Newton-Gleichung zu (1) und die dazu nötigen Ableitungen der Zielfunktion.

(b) Im *Gauss-Newton-Verfahren* bestimmt man die Suchrichtung s^k als Lösung der *Gauss-Newton Gleichung*

$$F'(x^k)^T F'(x^k) s^k = -F'(x^k)^T F(x^k). \tag{GN}$$

Welcher Term wurde hier im Vergleich mit der Newton-Gleichung für (1) vernachlässigt? Zeigen Sie, dass die Gauss-Newton-Gleichung (GN) zur klassischen Newton-Gleichung für $F(x) = 0$ äquivalent ist, wenn $F'(x^k)$ invertierbar ist, und dass in diesem Fall die Lösung s^k von (GN) eine Abstiegsrichtung für die Funktion $F(x)^T F(x)$ ist.

(c) Finden Sie eine konvexe, quadratische Funktion $q_k : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, so dass (GN) äquivalent zu $\nabla q(s^k) = 0$ ist. Was heißt das für s^k?

(d) Sei $\bar{x}$ eine Nullstelle von F und $F'(\bar{x})$ invertierbar. Zeigen Sie, dass die Vorschrift (GN) auf ein Newton-artiges Verfahren für das Problem (1) führt, welches für $x^k \to \bar{x}$ die Dennis-Moré-Bedingung erfüllt.

(e) Verwendet man das globalisierte Newton-artige Verfahren für (1) mit der Matrix $M_k = F'(x^k)^T F'(x^k)$, so nennt man das Verfahren *globalisiertes Gauss-Newton-Verfahren*. Die Niveaumenge $N_f(x^0)$ zum Startpunkt x^0 sei kompakt, und (x^k) seien die vom globalisierten Gauss-Newton-Verfahren erzeugten Iterierten. Zeigen Sie:

   i. Jeder Häufungspunkt $\bar{x}$ von (x^k) erfüllt $F'(\bar{x})^T F(\bar{x}) = 0$.
   Hinweis: Benutzen den Konvergenzssatz über das globalisierte Newton-Verfahren aus der Vorlesung bzw. argumentieren Sie, weshalb dieser hier benutzt werden kann.

   ii. Sei $\bar{x}$ nun ein Häufungspunkt von (x^k). Ist $F'(\bar{x})$ invertierbar, so gilt $F(\bar{x}) = 0$ und die Hessematrix von $F(x)^T F(x)$ in $\bar{x}$ ist positiv definit.

   iii. Nehmen Sie an, dass das globalisierte Gauss-Newton-Verfahren in der Nähe von $\bar{x}$ in das Gauss-Newton-Verfahren übergeht (das müssen Sie nicht beweisen), $\bar{x}$ ein Häufungspunkt von (x^k) ist, und dass $F'(\bar{x})$ invertierbar ist. Zeigen Sie, dass q-superlineare Konvergenz $x^k \to \bar{x}$ gilt, und dass sogar q-quadratische Konvergenz erreicht wird, wenn F' Lipschitz-stetig auf einer Umgebung von $\bar{x}$ ist.