Nichtlineare Optimierung
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Prof. Dr. Irwin Yousept
Hannes Meinlschmidt

WS 2012/13
22.11.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Energiefunktion und Newton-Richtung)
Sei $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar. Betrachten Sie die Funktion $\mathscr{E} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$\mathscr{E}(x) = \frac{1}{2}\|F(x)\|^2.$$

(a) Wie verhalten sich Extrema und Nullstellen von $\mathscr{E}$ und F zueinander? Welche Möglichkeiten ergeben sich, um Nullstellen der Funktion F zu finden?

(b) Nehmen Sie an, dass $F'(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}^n$ invertierbar ist und zeigen Sie, dass die Newton-Richtung für F in x eine Abstiegsrichtung für $\mathscr{E}$ ist.

Bemerkung. Funktionen wie $\mathscr{E}$, die entlang solcher spezieller Wege (wie hier der Newton-Schritt von F) abnehmen, sind in weitreichenden Kontexten interessant und werden überlicherweise *Energiefunktionen* bzw. manchmal auch *Lyapunov-Funktionen* für F genannt (wegen ersterem auch der Buchstabe $\mathscr{E}$).

Aufgabe G2 (Newton-Verfahren und Startpunkte)
Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x| - \arctan(|x|)$. Zeigen Sie zunächst, dass die Funktion sinnvoll differenzierbar ist und geben Sie die Ableitungen an. Beweisen Sie damit dann, dass das Newton-Verfahren zur Minimierung dieser Funktion für keinen Startpunkt x^0 mit $|x^0| \geq 2$ gegen das (eindeutige) Minimum von f konvergiert.

Aufgabe G3 (Newton-Verfahren auf $\mathbb{R}$)
In dieser Aufgabe untersuchen wir das Konvergenzverhalten des Newton-Verfahrens auf $\mathbb{R}$ genauer. Sei zu $m \in \mathbb{N}$ mit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine $m+1$ mal stetig differenzierbare Funktion und x^* eine m-fache Nullstelle von f gegeben.

(a) Zeigen Sie zunächst allgemein

$$g \in 1 + O\left(\|y\|\right) \iff g \in \frac{1 + O\left(\|y\|\right)}{1 + O\left(\|y\|\right)} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1 + O\left(\|y\|\right)}{1 + O\left(\|y\|\right)} = 1 + O\left(\|y\|\right).$$

(b) Bestimmen Sie die Konvergenzrate des Newton-Verfahrens

$$x^{k+1} = x^k - \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

in Abhängigkeit von m, sowie, im Falle linearer Konvergenz, die Konvergenzrate.
Hinweis: Taylorentwicklungen von f und f' mit Entwicklungspunkt x^* helfen!

(c) Betrachten Sie nun das folgende veränderte Newton-Verfahren:

$$x^{k+1} = x^k - \alpha \frac{f(x^k)}{f'(x^k)}$$

mit einem Parameter $\alpha \in \mathbb{N}$, wobei $\alpha > 1$. Für welche m konvergiert dieses Verfahren? Bestimmen Sie für die m, für die das Verfahren konvergiert, die Konvergenzrate in Abhängigkeit von α.

Hausübung

Aufgabe H1 (Newton-Verfahren und Startpunkte, Teil 2) (4 Punkte)
Betrachten Sie die Funktion

$$f : (0, \infty) \to \mathbb{R} : x \mapsto -\ln(x) + x.$$

Für welche Startpunkte x^0 konvergiert das Newton-Verfahren für Minimierungsprobleme?

Aufgabe H2 (Modifizierte Newton-Richtung) (9 Punkte)
Sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x_1, x_2) := x_1^4 - 3x_1^2 + 2 + 2x_2^2$. Wir betrachten das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x)$ mit der folgenden Modifikation: Falls die Hessematrix $\nabla^2 f(x^k)$ nicht positiv definit ist, so soll anstelle der klassichen Newton-Richtung die modifizierte Newton-Richtung

$$s_k := -(\nabla^2 f(x^k) + \mu_k I)^{-1} \nabla f(x^k)$$

verwendet werden, wobei I die Einheitsmatrix ist. Hierbei soll μ_k so gewählt werden, dass die Matrix $\nabla^2 f(x^k) + \mu_k I$ positiv definit ist, was durch die Wahl

$$\mu_k \geq \mu + \max\{0, -\lambda_{\min}(\nabla^2 f(x^k))\},$$

mit einer Konstante $\mu > 0$ erreicht wird.

(a) Zeigen Sie zunächst allgemein für $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar, dass die Wahl für μ_k in der Tat erreicht, dass $\nabla^2 f(x^k) + \mu_k I$ positiv definit ist, wenn $\nabla^2 f(x^k)$ selbst nicht positiv definit ist.

(b) Zurück zur oben angegebenen Funktion: Berechnen Sie die ersten beiden Schritte dieses Verfahrens mit dem Startpunkt $x^0 = (1/2, 1)^T$. Verwenden Sie dabei zur Wahl von μ_k die Konstante $\mu = 1$, und bestimmen Sie die Schrittweiten nach der Armijo-Regel mit den Parametern $\gamma = 1/4$ und $\beta = 1/2$.

(c) Skizzieren Sie die Höhenlinien von f. Zeichnen Sie im Startpunkt x^0 die klassische Newton-Richtung, den (normierten) negativen Gradienten und die Richtungen aus Aufgabenteil (a), sowie die berechneten Iterationspunkte ein. Wäre der klassische Newton-Schritt im globalisierten Newton-Verfahren mit den Parametern $\alpha_1 = 10^{-3}$, $\alpha_2 = 10^{-1}$ und $p = 1$ angenommen worden?

Aufgabe H3 (Konvergenzgeschwindigkeit) (5 Punkte)
Betrachten Sie das Newton-Verfahren zur Minimierung der Funktion $f(x) = |x|^p$ mit $p > 1$ und Startpunkt $x^0 \neq 0$.

(a) Differenzieren Sie die Funktion f so oft wie nötig für das Newton-Verfahren und schreiben Sie die Ableitung mithilfe der Vorzeichenfunktion geschlossen für alle $x \in \mathbb{R}$ im Definitionsbereich der Ableitung auf.

(b) Sei zunächst $p > 2$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren Q-linear gegen das globale Minimum $\bar{x} = 0$ konvergiert und bestimmen Sie die Konvergenzrate. Zeigen Sie insbesondere, dass die Konvergenz nicht Q-superlinear ist. Warum ist dies kein Widerspruch zum lokalen Konvergenzsatz der Vorlesung?

(c) Wieso wurde in Teilaufgabe (a) der Fall $p = 2$ ausgeschlossen?

(d) Untersuchen Sie nun den Fall $p \in (1, 2)$. Zeigen Sie, dass das Newton-Verfahren auch für $p \in (3/2, 2)$ linear gegen 0 konvergiert. Was passiert im Fall $p = 3/2$?