# Nichtlineare Optimierung
# 1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Prof. Dr. Irwin Yousept**
Hannes Meinlschmidt

**WS 2012/13**
**25.10.2012**

## Gruppenübung

**Aufgabe G1** (Landau-Notation)
In der Vorlesung wurden die Landau-Symbole folgendermaßen definiert: Für eine Funktion $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gilt

$$g(s) = O(\|s\|^k) \text{ für } s \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \limsup_{s\to 0} \frac{\|g(s)\|}{\|s\|^k} < \infty,$$

bzw.

$$g(s) = o(\|s\|^k) \text{ für } s \to 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{s\to 0} \frac{\|g(s)\|}{\|s\|^k} = 0.$$

(a) Beweisen oder widerlegen Sie, jeweils für $s \in \mathbb{R}$ und $s \to 0$:
   i. $s = O(\|s\|^2)$,
   ii. $s^2 = o(\|s\|)$,
   iii. $\sin(s) = O(\|s\|)$,
   iv. $1 = o(\|s\|)$.

(b) Wie lässt sich $g = O(\|s\|^k)$ bzw. $g = o(\|s\|^k)$ für $s \to 0$ anschaulich in Bezug auf Wachstum der Funktion $g$ interpretieren? Könnte man auch etwas anderes als $s \to 0$ betrachten?

(c) Diskutieren Sie die Schreibweise $g(s) = O(\|s\|^k)$ und formulieren Sie sie mathematisch exakter. Welche Falle entsteht durch das Gleichheitszeichen in der Definition der Landau-Symbole (Stichwort Transitivität)? Betrachten Sie ausserdem die Definition der Ableitung bzw. die erste Taylorentwicklung einer differenzierbaren Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, also

$$f(x+s) = f(x) + \nabla f(x)^T s + o(\|s\|).$$

Für welche Art von Objekt steht $o(\|s\|)$ hier und wie ist die Gleichung im Hinblick darauf zu verstehen?

(d) Gilt für Funktionen $f, g$ mit $f(s) = O(\|s\|^k)$ und $g(s) = O(\|s\|^k)$ auch $(f+g)(s) = O(\|s\|^k)$, bzw. für Funktionen $f, g$ mit $f(s) = o(\|s\|^k)$ und $g(s) = o(\|s\|^k)$ auch $(f+g)(s) = o(\|s\|^k)$? Was lässt sich über die Funktion $cf$ mit $c \in \mathbb{R}$ aussagen?

**Aufgabe G2** (Konvexe Funktionen und Mengen)
Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ eine konvexe Menge.

(a) Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $g : K \to I$ (streng) konvex und $f : I \to \mathbb{R}$ (streng) monoton wachsend und konvex. Zeigen Sie, dass die Komposition

$$f \circ g : K \to \mathbb{R}$$

(streng) konvex ist. Finden Sie ein Beispiel, das zeigt, dass allgemein auf die Monotonie von $f$ nicht verzichtet werden kann.

(b) Sei nun $f : K \to \mathbb{R}$ konvex und auf einer Umgebung von $K$ stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass man die Funktion $f$ als Supremum all ihrer Tangenten darstellen kann, d.h. dass für jedes $x \in K$

$$f(x) = \sup_{y\in K} f(y) + \nabla f(y)^T (x-y)$$

gilt.

(c) Seien $c_1, \dots, c_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvex und $h \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ affin-linear. Dann ist die Menge

$$C = \{x \in \mathbb{R}^n : c(x) \leq 0 \text{ und } h(x) = 0\}$$

konvex, wobei $c(x) = (c_1(x), \dots, c_m(x))^T$ und $c(x) \leq 0$ genau dann, wenn $c_i(x) \leq 0$ für $i = 1, \dots, m$.

**Aufgabe G3** (Taylorentwicklung)
Bestimmen Sie für die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$f(x_1, x_2) = x_1 e^{-(x_1+x_2)},$$

das Taylorpolynom zweiter Ordnung im Entwicklungspunkt $(0, 0)$. Ist die Funktion (streng) konvex, (streng) konkav oder weder konvex noch konkav?

## Hausübung

**Aufgabe H1** (Koerzive Funktionen) (5 Punkte)
Gegeben sei eine stetige Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ und eine abgeschlossene Menge $\emptyset \neq X \subset \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass $f$ über $X$ ein Minimum annimmt.
*Bemerkung.* Funktionen mit der Eigenschaft $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty$ heißen auch *koerziv* oder *radial unbeschränkt*.

**Aufgabe H2** (Differenzieren im Mehrdimensionalen und quadratische Funktionen) (6 Punkte)
(a) Zeigen Sie, dass für stetig differenzierbare Abbildungen $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ folgende Produktregel gilt:

$$\nabla \left( F(x)^T G(x) \right) = \nabla F(x) G(x) + \nabla G(x) F(x),$$

wobei wir hier die Schreibweise $\nabla F(x) := F'(x)^T$ bzw. $\nabla G(x) = G'(x)^T$ aus der Vorlesung verwenden.

(b) Berechnen Sie den Gradienten und die Hesse-Matrix der Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c,$$

mit $b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

(c) Zeigen Sie, dass $f$, wie in Aufgabenteil (b) gegeben, in beiden folgenden Fällen ein globales Minimum annimmt:
- $A$ ist positiv definit,
- $A$ ist positiv semidefinit und es gibt ein $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so dass $Ax_0 = -b$.

Handelt es sich jeweils um ein striktes Minimum?

**Aufgabe H3** (Unrestringierte Optimierung quadratischer Funktionen) (4 Punkte)
Schreiben Sie die Funktion

$$f(x_1, x_2) = 5x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2 + 3$$

in der allgemeinen Form $f(x) = \frac{1}{2} x^T A x + b^T x + c$ mit symmetrischer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Ist $A$ positiv definit? Finden Sie das globale Minimum von $f$.