

Einführung in die mathematische Software Übung 3



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

PD Dr. Ulf Lorenz
Dipl.-Math. Thomas Opfer

Wintersemester 2012/2013
Woche: 19.11.2012 - 23.11.2012

Aufgabe 1 Ausgleichsrechnung



In der ersten Übung wurde das Wachstum eines Goronen untersucht. Die Biologin ist sich nicht mehr ganz sicher, ob sie ihre Parameter richtig gewählt hat. Sie hält weiterhin an der Modellfunktion

$$f(x) = \frac{2500 \cdot e^{\frac{a}{100} \cdot x}}{b + e^{\frac{a}{100} \cdot x}}$$

fest. Ihre Messungen haben folgende Werte ergeben:

x	90	180	270	360	450	540	630	720
f(x)	299,72	723,33	1178,98	1711,08	2161,69	2260,98	2418,65	2502,74

Finden Sie geeignete Parameter a und b . Fertigen Sie außerdem einen Plot an.
Hinweis: Schauen Sie sich die Unterlagen der ersten Vorlesung noch einmal an.

Aufgabe 2 Gleichungssysteme



Lösen Sie das folgende (nichtlineare) Gleichungssystem nach x und y :

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= 16 \\ x + y &= p\end{aligned}$$

Schauen Sie sich in der Hilfe unter `solve, details` an, wie Sie mit dem Parameter `Explicit` dafür sorgen können, dass Ihnen die Lösungen in der Ihnen bekannten Form angezeigt werden.

Aufgabe 3 Prozeduren



Schreiben Sie eine Prozedur, die für eine gegebene natürliche Zahl n alle Zahlen zwischen 1 und n nacheinander ausgibt.

Aufgabe 4 Prozeduren



- Übernehmen Sie die Prozedur *maxima* aus der zweiten Vorlesung.
- Testen Sie sie an folgenden Beispielen:
 - $f(x) = -x^2$
 - $g(x) = -x^4$
 - $h(x) = -x^4 - x^3 + 10 \cdot x^2 + 3$
 - $i(x) = \sin(x)$

Entspricht das Ergebnis Ihren Erwartungen? Können Sie sich ggf. erklären, wieso nicht?

Kommt ein Mathematik-Student in ein Fotogeschäft: „Guten Tag! Ich möchte diesen Film entwickeln lassen.“
Verkäuferin: „9 x 13?“ - „117. Wieso?“
Kommt ein Mathematik-Professor in ein Fotogeschäft. „Guten Tag! Ich möchte diesen Film entwickeln lassen.“
Verkäuferin: „10 x 15?“ - „Ja, das ist lösbar. Wieso?“

Aufgabe 5 Sequenzen

a) Machen Sie sich klar, was Sequenzen sind. Was tun die folgenden Eingaben?

- 1) $a := 3, 4, 5;$
- 2) $b := \text{NULL}, 1, 9;$
- 3) $c := a, b;$
- 4) $c := c, 42;$

Hinweis: NULL ist die leere Sequenz.

b) Schreiben Sie eine Prozedur, die eine Sequenz mit allen Fakultäten zurückgibt, die kleiner als eine gegebene natürliche Zahl n sind.

Beispiel: Eingabe: 7, Ausgabe: 1, 2, 6.

Hinweis: Denken Sie daran, dass Schleifen u.a. die folgende Form haben können: `for ... while ... do ... end do.`

Aufgabe 6 Polynome

In dieser Aufgabe dürfen Sie annehmen, dass die Methode *maxima* aus der Vorlesung nur auf Polynome angewendet werden soll.

a) Vergleichen Sie als Vorüberlegung die Resultate folgender Eingaben:

- i) `if $\sqrt{4} > 0$ then 1 else 0 end;`
- ii) `if $\sqrt{3} > 0$ then 1 else 0 end;`
- iii) `if is($\sqrt{4} > 0$) then 1 else 0 end;`
- iv) `if is($\sqrt{3} > 0$) then 1 else 0 end;`

b) Modifizieren die Prozedur *maxima* so, dass sie statt der Anzahl eine Liste der Maximalstellen zurückgibt.

c) Nun sollen für Polynome von höchstens Grad 5 die Maximalstellen exakt zurückgegeben werden, für höhere Polynome wie gehabt.

d) Für gewisse Polynome (z.B. $f(x) = x^4$) funktioniert diese Methode aus c) nicht korrekt. Beheben Sie dieses Problem zumindest für Polynome von höchstens Grad 5, indem sie auch höhere Ableitungen betrachten.

e) Testen Sie ihre Methode an folgenden Funktionen:

- i) $g(x) = -x^4$
- ii) $h(x) = -x^4 - x^3 + 10 \cdot x^2 + 3$

f) Können Sie sich erklären, woher die Forderung Grad 5 kommt?

Hinweis

Intensivaufgaben richten sich primär an diejenigen, die eine eigene Maple-Lizenz besitzen und sich näher mit der Software beschäftigen wollen. Es ist jedoch jeder Interessierte herzlich eingeladen, sich ebenfalls damit zu beschäftigen.

Aufgabe 7 Bildverarbeitung

Intensivaufgabe

Wichtig: Zum Lösen dieser Aufgabe benötigen Sie einige Befehle aus dem Paket `ImageTools`. Sie werden feststellen, dass viele der erwähnten Befehle auch in anderen Paketen (z.B. `AudioTools`) vorkommen und dort eine andere Bedeutung haben. Achten Sie also bei einer eventuellen Recherche in der Hilfe darauf, den richtigen Befehl auszuwählen.

Hinweis: Sie können sich den aktuellen Stand ihres Bildes jederzeit anzeigen. Dazu sind die Befehle `View`, `Preview` und `Write` hilfreich.

- Öffnen Sie ein neues Dokument im *Document Mode*. Laden Sie das Paket `ImageTools` (Stichwort: `with`).
- Laden Sie von der [Website der Veranstaltung](#) aus dem Übungsbereich die Datei `Image1.jpg` herunter. Merken Sie sich den vollen Pfad der Stelle, an der Sie die Datei speichern (z.B. `/home/pXXX/Image1.jpg` oder `/home/pXXX/Downloads/Image1.jpg`).
- Laden Sie die Grafik mit Hilfe des `Read`-Befehls in eine Variable.
(*Hinweis für Windows-Benutzer:* Benutzen Sie folgende Notation für Pfade: `c:/Pfad/zur/Datei/Image1.jpg`)
- Wandeln Sie das Bild mit dem `ToGrayscale`-Befehl in ein Graustufenbild um. Sie haben nun ein 2D-Feld mit Fließkommazahlen zwischen 0 und 1. Jedes Element des Feldes repräsentiert einen Bildpunkt. 0 bedeutet schwarz, 1 bedeutet weiß (vgl. [Abbildung 1](#)). Wenn Ihr Feld `A` heißt, können sie die einzelnen Bildpunkte mittels `A[Zeile, Spalte]` erreichen, z.B. `A[10, 10]`. Schauen Sie sich das Resultat an.
- Drehen Sie das Schwarz-Weiß-Bild mit Hilfe des `Rotate`-Befehls um 90° gegen den Uhrzeigersinn. Überprüfen Sie das Ergebnis.
- Leider hat sich in dem Bild ein sehr starkes *Salt-and-Pepper-Rauschen* eingeschlichen. Dieses soll in dieser Aufgabe eliminiert werden. Eine Möglichkeit dazu ist der sogenannte *Medianfilter*. Dieser berechnet für alle (inneren) Bildpunkte den *Median* des Ursprungsbildpunktes und der 8 Bildpunkte rundherum.

In Maple kann der Median von 9 Werten bestimmt werden, indem man die 9 Werte in eine Liste einfügt und die `Statistics[Median]`-Funktion darauf anwendet.

Legen Sie ein neues Bild mit der selben Größe an. Wenden Sie den Medianfilter an. Achten Sie darauf, nicht das Ursprungsbild zu modifizieren. Die Berechnung kann einige Sekunden dauern. Die Bildpunkte am Rand dürfen Sie für diese Aufgabe ignorieren, da diese keine 8 Pixel rundherum haben. Schauen Sie sich das Ergebnis an.



$$\begin{pmatrix} 0 & 0,5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Abbildung 1: Einfache Grafik aus 4 Bildpunkten mit zugehöriger Matrix

- g) Nun sollen in Ihren gefilterten Bild Kanten gesucht werden. Dafür verwendet man sogenannte 3×3 -Filter. Diese verwenden das Ursprungspixel und die 8 Pixel rundherum und geben an, mit welcher Gewichtung sie im resultierenden Bild aufsummiert werden sollen. Dies ist in Maple bereits implementiert, sie müssen dazu **keine eigene Schleife** schreiben.

Zur horizontalen bzw. vertikalen Kantenerkennung verwendet man beispielsweise *Sobel-Filter*. Diese geben in gewisser Weise eine Approximation der Ableitung an.

$$\text{SobelX} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{SobelY} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

Wenden Sie mit Hilfe des Convolution-Befehls aus dem eingebundenen Paket ImageTools beide Filter getrennt auf das Bild an und speichern Sie die Resultate in 2 getrennten Variablen.

- h) Leider können bei alleiniger Anwendung dieser Filter gewisse Bildpunkte Werte erhalten, die kleiner als 0 sind. Diese würden schwarz, wenn man das Bild direkt schreibt, obwohl sie Kanten repräsentieren können. Außerdem erhalten wir bei getrennter Anwendung der beiden Filter nur horizontale bzw. vertikale Kanten. Dieses Problem umgeht man, in dem man den *Sobel-Operator* folgendermaßen „definiert“: Sei GX das Resultat des SobelX-Filters und GY das Resultat des SobelY-Filters. Dann ist das Resultat des Sobel-Operators das Resultat des folgenden Maple-Befehls:

$$GS := \text{sqrt} \sim (GX^2 + GY^2);$$

Schauen Sie sich GS an. Kanten sollten weiß sein, der Rest sollte dunkel sein.