Lineare Algebra II
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
17./18. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Die Bilinearform $F\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $(x,y) \mapsto x^T A y$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum $\{0\} \neq U \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass für jedes $x \in U$ die Abbildung

$$f_x\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f_x(y) := F(x,y)$$

identisch Null ist, d.h. $f_x(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ erfüllt?
(In einem solchen Fall nennt man die Bilinearform ausgeartet.)

(b) Sei jetzt $G\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^T B y$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum U wie in (a), d.h. so, dass $g_x(y) := G(x,y) \equiv 0$ für alle $x \in U$?

(c) Sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x,x)$. Für welche Unterräume $\{0\} \neq U$ von $\mathbb{R}^2$ ist die auf U eingeschränkte Abbildung $Q|_U : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d. h. $Q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

Aufgabe G2

(a) Sei V endlichdimensional und $\phi\colon V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Zeigen oder widerlegen Sie: ϕ ist genau dann symmetrisch, wenn es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass $\phi(v_i, v_j) = \phi(v_j, v_i)$ für alle $1 \leq i,j \leq n$ gilt.

(b) Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \phi(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

eine symmetrische Bilinearform. Bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis.

(c) Sei V der Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Betrachten Sie die Abbildung

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \phi(A,B) := \operatorname{tr}(AB).$$

Zeigen Sie, dass ϕ eine symmetrische Bilinearform ist und bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis.

(d) Sind die in (b) und (c) untersuchten Bilinearformen Skalarprodukte?

Aufgabe G3 (Quadratische Formen)

Wir betrachten den reellen Vektorraum V der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ erfüllt, aber keine quadratische Form ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\det \colon V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form ist.

(c) Bestimmen Sie die Strukturmatrix der mit $\det$ assoziierten Bilinearform bezüglich der Basis

$$B = \left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(d) Transformieren Sie die Strukturmatrix von $\det$ in eine Basis, bezüglich der sie Diagonalgestalt hat.

Aufgabe G4

Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Quadrik im $\mathbb{R}^2$ um eine Ellipse handelt.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und skizzieren Sie die Quadrik.