Lineare Algebra II
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
10./11. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Warum gibt es eine unitäre Matrix Q, so dass für

$$A := \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

die Matrix $A' = Q^{-1}A\,Q$ eine Diagonalmatrix ist?

Aufgabe G2
Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine komplexe Matrixen. Zeigen Sie: A ist genau dann normal, wenn $A + A^*$ und $A - A^*$ kommutieren.

Aufgabe G3
Seien V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $\phi, \psi \in \mathrm{End}(V)$ Endomorphismen. Zeigen Sie:

(a) $(\phi^*)^* = \phi$

(b) $(\lambda\phi + \mu\psi)^* = \overline{\lambda}\phi^* + \overline{\mu}\psi^*$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(c) $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$

(d) $\ker \phi^* = (\mathrm{Bild}\,\phi)^\perp$

(e) $\mathrm{Bild}\,\phi = (\ker \phi^*)^\perp$

Aufgabe G4
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix P an, für die P^TAP eine Diagonalmatrix ist und berechnen Sie P^TAP.

Hausübung

Aufgabe H1
Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathrm{O}(3)$, so dass Q^TAQ Diagonalgestalt hat.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Sei $V_2 = \{\sum_{k=0}^{2} a_k t_k \mid a_k \in \mathbb{R}, 0 \leq k \leq k\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie ϕ^* für $\phi(p) = p'$.

(b) Berechnen Sie ψ^* für $\psi(p) = p''$.

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist genau dann normal, wenn es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ gibt, sodass $A^* = p(A)$.