Lineare Algebra II
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
26./27. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Beweisen Sie den **Satz vom Fußball**:
In jedem Fußballspiel gibt es zwei Punkte auf dem Fußball, die sich zu Beginn beider Halbzeiten an derselben Stelle befinden.

Aufgabe G2
(a) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{13} & \frac{12}{13} \\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie alle reellen, orthogonalen oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen.

Aufgabe G3
Es sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie $A^\perp$ und $(A^\perp)^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe G4
Es seien V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A, B \subseteq V$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) $A \subseteq B \Rightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$
(b) $A \subseteq B^\perp \Leftrightarrow B \subseteq A^\perp$

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $v \in V$ ein Einheitsvektor. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\sigma_v : V \to V : x \mapsto x - 2\langle x, v\rangle v.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung σ_v ist orthogonal.

(b) Der von v aufgespannte Teilram $\mathrm{Span}\{v\} = \mathbb{R}v$ ist der Eigenraum von σ_v zum Eigenwert -1 und sein Orthogonalraum der Eigenraum zum Eigenwert 1.

(c) Wie kann man die Abbildung σ_v geometrisch interpretieren?

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Es seien V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A \subseteq V$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) $A \subseteq \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$

(b) $A^{\perp} = \left(\left(A^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp}$

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Sei $V = C([0,1])$ der Raum der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $U = \mathrm{Span}\{1, x, x^2\}$ der Unterraum der Polynome vom Grad höchstens 2. Wir statten V mit dem Skalarprodukt

$$\langle f(x), g(x)\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

aus. In dieser Aufgabe finden wir eine gute Näherung für die Funktion $x \mapsto e^x$ in U.

(a) Welche Dimension haben die Räume U und V?

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U.

(c) Benutzen Sie die Approximationseigenschaft der Orthogonalprojektion, um die optimale Näherung $g(x)$ für e^x zu berechnen.

(d) Skizzieren oder plotten Sie die Funktionen e^x und $g(x)$ in einem Koordinatensystem.

Beachten Sie, dass wir für die Bestimmung von $g(x)$ keine Differentialrechnung verwendet haben.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$ und $\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x = e - 2$.