Lineare Algebra II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
19./20. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Betrachte $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_4 \\ -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

Aufgabe G2
Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \mathrm{Span}\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $x = (1, 1, 1, 1)^T$ auf den Teilraum U.

Aufgabe G3
Wir betrachten den Raum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ der reellen Polynomfunktionen. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx$$

ein Skalarprodukt auf $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ definiert ist.

Aufgabe G4
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sowohl durch

$$b_1^+ := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad b_2^+ := \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

als auch durch

$$b_1^- := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad b_2^- := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine Orthonormalbasis gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ von der Form (1) oder (2) ist.

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Wir betrachten wieder den Raum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ der reellen Polynomfunktionen mit Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,dx.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis des Unterraums, der von den Funktionen p_0, p_1, p_2, p_3 mit $p_k(x) = x^k$ aufgespannt wird. Die so erhaltenen Polynome heißen (bis auf Normierung) *Legendre-Polynome*.

(b) Wir bezeichnen mit $U \subseteq V$ den von p_0, p_1, p_2 aufgespannten Teilraum. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von p_4 auf U.

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Sei V der Vektorraum der komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei denen nur endlich viele a_n von Null verschieden sind. Wir definieren ein Skalarprodukt auf V durch

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n \overline{b_n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass V mit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein unitärer Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0 \right\}$$

von V ein echter (das heißt $U \neq V$) linearer Teilraum ist.

(c) Bestimmen Sie den Orthogonalraum $U^\perp$.
Hinweis: Können Sie ein paar „einfache“ Vektoren in U finden?