Lineare Algebra II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
12./13. November

Gruppenübung

Aufgabe G1
Nehmen Sie zu folgendem „Beweis" des Satzes von Cayley-Hamilton Stellung:

$$p_A(A) = \det(A - A \cdot E) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$

Aufgabe G2
Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine $n \times n$-Matrix mit

$$-A^4 = 2A^2 + E \qquad (*)$$

(a) Zeigen Sie, dass n gerade sein muss.

(b) Man bestimme für gerades n eine Matrix A, welche $(*)$ erfüllt.

Aufgabe G3
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Sei $X \in M_{n+m}(\mathbb{K})$ eine obere Block-Dreiecksmatrix

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

mit Untermatrizen $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass für die jeweiligen charakteristischen Polynome P_X, P_A und P_B gilt:

$$P_X = P_A \cdot P_D.$$

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

(c) Gilt die Aussage aus (a) auch für Minimalpolynome?

Aufgabe G4 (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die gleiche Determinante, die gleiche Spur und das gleiche charakteristische Polynom haben.

(b) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen das gleiche Minimalpolynom haben.

(c) Finden Sie jeweils zwei (3×3)-Matrizen mit
   (i) gleicher Determinante,
   (ii) gleicher Spur,
   (iii) gleichem charakteristischem Polynom,
   (iv) gleichem Minimalpolynom,
   die nicht ähnlich sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Bestimmen Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen mit komplexen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H2 (10 Punkte)
Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_2(\mathbb{K})$ eine 2×2-Matrix über $\mathbb{K}$, deren charakteristisches Polynom $P_A \in \mathbb{K}[t]$ keine Nullstelle über $\mathbb{K}$ hat.

(a) Schreiben Sie das charakteristische Polynom von A als Funktion der Spur und der Determinante von A.

(b) Man betrachte den Vektorraum $L := \mathsf{Span}\{E, A, A^2, \ldots\} \subset M_2(\mathbb{K})$. Wie groß ist die Dimension dieses Vektorraums?
Hinweis: Zeigen Sie, dass alle Potenzen von A als Linearkombination von A und E dargestellt werden können.

(c) Zeigen Sie, dass $L = \mathsf{Span}\{E, A\}$ unter Matrixmultiplikation abgeschlossen ist.

(d) Zeigen Sie, dass alle $B \in L \setminus \{0\}$ invertierbar sind und $B^{-1} \in L$ gilt.

(e) Schließen Sie, dass L mit der üblichen Matrixmultiplikation ein Körper ist.

(f) Mit der Identifikation $\mathbb{K} \ni a \mapsto aE \in L$ wird $\mathbb{K}$ als Teilmenge von L aufgefasst. Analog wird $\mathbb{K}[t]$ eine Teilmenge von $L[t]$. Zeigen Sie, dass P_A in $L[t]$ in Linearfaktoren zerfällt.

(g) Begründen Sie, welchen Körper man für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält und bestimmen Sie die Nullstellen von P_A über L.

(h) Konstruieren Sie einen Körper mit vier Elementen.

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt nilpotent, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$. Zeigen Sie:

(a) Für eine nilpotente $(n \times n)$-Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $A^n = 0$.

(b) Eine komplexe Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist genau dann nilpotent, wenn sie außer Null keine weiteren Eigenwerte besitzt.

(c) Jede komplexe nilpotente Matrix ist zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix (d. h. eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen) ähnlich.