Lineare Algebra II
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
5./6. November

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Sei $p(t) = \sum_k a_k t^k$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Besitzt p eine ganzzahlige Nullstelle $\lambda \in \mathbb{Z}$, so ist λ ein Teiler von a_0, d. h. es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 = \lambda q$.

(b) Bestimmen Sie für das folgende Polynom alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten:

$$p(t) = t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1$$

Hinweis: Das Polynom besitzt nur ganzzahlige Nullstellen.

Aufgabe G2

Wir bezeichnen mit $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Machen Sie sich klar, dass $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) : f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl λ ein Eigenwert von D ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Exponentialfunktion.

(c) Machen Sie sich klar, dass die Menge aller Polynomfunktionen $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein linearer Teilraum von $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, $D(\mathscr{P}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, d. h. die Abbildung D lässt sich auf den Teilraum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ einschränken.
Finden Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der eingeschränkten Abbildung $D|_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}) : p \mapsto p'$.

Aufgabe G3

Wir definieren rekursiv eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen durch

$$f_1 := 1\,, \qquad f_2 := 1\,, \qquad f_{n+2} := f_n + f_{n+1} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Die so konstruierten Zahlen f_n heißen *Fibonacci-Zahlen.*

(a) Berechnen Sie die ersten acht Fibonacci-Zahlen.

(b) Um eine Darstellung zu finden, mit der man ohne Rekursion direkt das n-te Folgeglied angeben kann, verwenden wir das Konzept der Eigenwerte einer Matrix.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := (f_n, f_{n+1})^T \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine (2×2)-Matrix A mit

$$x_{n+1} = A x_n.$$

Mit vollständiger Induktion folgt dann $x_n = A^{n-1} x_1$. Insbesondere ist die Fibonacci-Zahl f_n der erste Eintrag des Vektors $A^{n-1} x_1$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix A.

(d) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die n-te Fibonacci-Zahl, indem Sie die Potenzen A^n bestimmen.

Aufgabe H1 (5 Punkte)

(a) Sei V ein Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass ϕ^2 den Eigenwert 1 hat. Sei $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor von ϕ^2, der kein Eigenvektor von ϕ ist. Zeigen Sie, dass ϕ die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Sei V ein Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass -1 ein Eigenwert von $\phi^2 + \phi$ ist. Zeigen Sie, dass ϕ^3 den Eigenwert 1 hat.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom und die komplexen Eigenwerte mit zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche der Matrizen können Sie über $\mathbb{R}$ diagonalisieren, welche über $\mathbb{C}$?

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Sei $\mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$ fest. Betrachten Sie den linearen Endomorphismus $S : \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, der gegeben ist durch

$$(Sf)(x) = f(x + x_0).$$

(a) Machen Sie sich klar, dass sich S auf den linearen Teilraum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen einschränken lässt (ohne Beweis). Zeigen Sie, dass die konstanten Funktionen die einzigen Eigenvektoren der eingeschränkten Abbildung $S|_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass jede positive, reelle Zahl $\lambda > 0$ ein Eigenwert von S ist.