Lineare Algebra II
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dipl. Math. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
29./30. Oktober 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Aufgabe G2

(a) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A auch ein Eigenwert der transponierten Matrix A^T ist. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenräume im Allgemeinen nicht übereinstimmen.

(b) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit komplexen Einträgen. Wie hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit den Eigenwerten und Eigenvektoren der komplex konjugierten Matrix $\bar{A}$ zusammen?

Aufgabe G3
Betrachten Sie die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathscr{C}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass die Matrix von ϕ die folgende Gestalt hat:

$$[\phi]_{\mathscr{C}}^{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Bestimmen Sie alle (2×2)-Matrizen über $\mathbb{K}$, die keine Eigenwerte haben.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B^T.$$

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass die geometrische Vielfachheit von λ kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit von λ ist.