Lineare Algebra II
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
11./12. Februar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei

$$J_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

ein Jordanblock zum Eigenwert λ. Für eine beliebige Matrix A definieren wir

$$e^A := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

(a) Berechnen Sie J_0^k.

(b) Berechnen Sie J_λ^k.
Hinweis: Benutzen Sie die Zerlegung $J_\lambda = \lambda E_n + J_0$.

(c) Seien A und B Matrizen mit $AB = BA$. Zeigen Sie, dass $e^{A+B} = e^A e^B$.
(Wir ignorieren hierbei alle Konvergenzprobleme. In diesem Fall konvergiert tatsächlich alles, was konvergieren soll, aber das geht über die Inhalte der linearen Algebra hinaus.)

(d) Zeigen Sie, dass $e^{S^{-1}AS} = S^{-1}e^A S$ für eine beliebige Matrix A und eine invertierbare Matrix S.

(e) Beweisen Sie, dass

$$e^{J_\lambda} = e^\lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{J_0^i}{i!}.$$

Aufgabe G2
Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ wobei $n = 2m$ gerade ist. Das charakteristische Polynom von A sei $p_A = p_0^m$, wobei $p_0 \in \mathbb{R}[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 2 in $\mathbb{R}[x]$ ist (z. B. $p_0 = x^2 + 1$). Also lässt sich p_0 in $\mathbb{C}[x]$ in zwei Linearfaktoren $(\lambda - x)(\overline{\lambda} - x)$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zerlegen.

(a) Zeigen Sie: Ist v ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert λ von Höhe k, dann ist $\overline{v}$ ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ von Höhe k und $[v] \cap [\overline{v}] = 0$.
(*Hinweis.* Folgendes Lemma dürfen Sie ohne Beweis benutzen: Seien $q_1, \ldots, q_m \in \mathbb{F}[x]$ teilerfremd. Ist $q = \prod_{i=1}^m q_i$, so gilt $\ker(q(\varphi)) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(q_i(\varphi))$.)

(b) Zeigen Sie, dass A ähnlich zu einer reellen Matrix $K \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist, die aus nur drei Arten von (2×2)-Blöcken besteht: $0 \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ und $A_0 = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ mit $b \neq 0$, wobei A_0 auf der Diagonalen auftritt, E_n und 0 direkt über der Diagonalen und 0 sonst (eine „Block-Jordannormalform“).

(c) Geben Sie Beispiele $A_k \in \mathbb{R}^{(6,6)}$ mit charakteristischem Polynom $(x^2+1)^3$ und Minimalpolynomen $q_{A_k} = (x^2+1)^k$ für $k = 1, 2, 3$ an.

Aufgabe G3

Wir benutzen Vektoren $s_n \in \mathbb{R}^3$ um den Zustand eines 3-dimensionalen Systems zur Zeit $n \in \mathbb{N}$ zu beschreiben (zum Beispiel die Position eines Teilchens im Raum). Die Evolution des Systems von Schritt n nach $n+1$ sei dabei gegeben durch

$$s_{n+1} = As_n \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 14 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie A in Jordannormalform, um eine Beschreibung von s_n als Funktion von n und dem initialen Zustand s_0 zu erhalten.

(b) Berechnen Sie s_{100} für $s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.