# Lineare Algebra II
# 12. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
28./29. Januar 2013

Gruppenübung

**Aufgabe G1**
Bestimmen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe G2**
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & & & \\ & 3 & & & \\ & & 3 & 1 & \\ & & & 3 & 1 \\ & & & & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie alle Eigenwerte und Eigenräume von $A$.
(b) Berechnen Sie $(A-3E)^k$ und bestimmen Sie $\ker(A-3E)^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$.
(c) Berechnen Sie $B^k$ und $\ker B^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe G3**
Die Matrix $A \in M_4(\mathbb{R})$ besitze nur die Eigenwerte 1 und $-1$. Geben Sie eine Jordansche Normalform von $A$ an für den Fall, dass

(a) die algebraische Vielfachheit sowie die geometrische Vielfachheit beider Eigenwerte zwei ist.
(b) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert $-1$ drei und die geometrische zwei ist.
(c) die algebraische sowie die geometrische Vielfachheit vom Eigenwert 1 eins ist, die algebraische Vielfachheit vom Eigenwert $-1$ drei und die geometrische eins ist.

**Aufgabe G4**
Bestimmen Sie je eine Jordansche Normalform der Matrizen

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tipp: Berechnen Sie zur Bestimmung der Jordanschen Normalform von $B$ zunächst die Matrix $B^3$.

Hausübung

**Aufgabe H1** (5 Punkte)
Seien $f_1, \dots, f_m \in K[t]$ Polynome. Zeigen Sie, dass dann

$$I := (f_1) + \ldots + (f_m)$$

ein Ideal ist.

**Aufgabe H2** (5 Punkte)
Es sei $A$ eine komplexe $n \times n$-Matrix und $J$ ihre Jordansche Normalform. Außerdem sei $\lambda$ ein Eigenwert von $A$.

(a) Zeigen Sie: Die algebraische Vielfachheit des Eigenwerts $\lambda$ von $A$ ist gleich der Anzahl der Diagonaleinträge von $J$, die gleich $\lambda$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Jordanblöcke in $J$ zum Eigenwert $\lambda$ gleich $n - \operatorname{rank}(A - \lambda E)$ ist.

(c) Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

**Aufgabe H3** (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie eine Jordansche Normalform und eine Jordanbasis für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}.$$

Bemerkung: Eine Jordanbasis ist hier eine Basis des $\mathbb{R}^2$, bzgl. der die Matrix in Jordannormalform vorliegt.

(b) Berechnen Sie $A^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.