Lineare Algebra II
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
21./22. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Betrachten Sie die quadratischen Formen Q_i mit

$$Q_i(x) = x^T A_i x$$

für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ und } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser quadratischen Formen sind positiv definit? Welche sind negativ definit? Zeigen Sie jeweils ihre Aussagen.

(b) Gibt es nicht invertierbare positiv definite Matrizen? Zeigen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe G2

Gilt analog zum Kriterium für positive Definitheit auch folgendes?

Eine reelle symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn für alle Hauptminoren $A_r, r = 1, \dots, n$ gilt $\det A_r \geq 0$.

Aufgabe G3

Sei $B \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = B^T B$ symmetrisch und positiv semidefinit ist. Falls B invertierbar ist, ist A sogar positiv definit.

Aufgabe G4

Gegeben sei die reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, für die A_n positiv bzw. negativ definit ist.

Aufgabe H1 (5 Punkte)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ positiv bzw. negativ definit?

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Zu einer symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ existiert eine symmetrische, positiv definite Matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$, für die $A = P^2$ gilt. Ist A positiv definit, so auch P.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass $\det : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix der assoziierten Bilinearform bezüglich der Basis

$$B = \left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Bestimmen Sie die Hauptachsen und skizzieren Sie die Mengen

$$\{u \in V \mid \det u = 1\}, \quad \{u \in V \mid \det u = -1\}$$

als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, wenn jede Matrix mit ihren Koordinaten bezüglich obiger Basis identifiziert wird.