Lineare Algebra II
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
14./15. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Gegeben sei die Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und den Typen der Quadrik.

Aufgabe G2
Wir betrachten Gleichungen der Form

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0,$$

wobei $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \le i, j \le n$ gelte. Die Lösungsmenge bezeichnen wir als *Quadrik*. Wir nehmen an, dass nicht alle Koeffizienten verschwinden.

(a) Schreiben Sie die Gleichung $Q(x) = 0$ für einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ohne Summenzeichen, indem Sie Matrizen und Vektoren benutzen.

(b) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation, das heißt eine Abbildung der Form $x \mapsto Ax + b$ für $A \in M_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(\phi(x)) = 0\}$$

wieder eine Quadrik ist.

(c) Wir betrachten die folgende Quadrik:

$$\mathcal{Q} := \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1\right\}$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen von $\mathcal{Q}$ und führen Sie eine Hauptachsentransformation durch. Geben Sie die Transformationsmatrix Q an. Um welches geometrische Objekt handelt es sich bei $\mathcal{Q}$?

Aufgabe G3

(a) Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein unitärer Raum. Wir betrachten V als $\mathbb{R}$-Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$, schränken die Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ auf $\mathbb{R}$ ein und definieren

$$(v, w) := \operatorname{Re} \langle v, w \rangle .$$

Zeigen Sie, dass $V_{\mathbb{R}}$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot, \cdot)$ zu einem euklidischen Raum wird.

(b) Sei $(v_1, \dots, v_n)$ eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Welche Dimension hat $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum? Geben Sie eine Basis an. Finden Sie Vektoren, die in $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum linear abhängig sind, in $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$- Vektorraum jedoch nicht.

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Gegeben sei die quadratische Hyperfläche

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; Q(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 24x_1x_2 + 14x_1 + 24x_2 + 6 = 0 \right\}.$$

(a) Bringen Sie die Quadrik auf die Form

$$Q(x_1 + a, x_2 + b) = (x_1, x_2)A(x_1, x_2)^T = 1.$$

Hinweis: Vergleichen Sie mit der Quadrik aus Aufgabe G1.

(b) Wie sieht die zugehörige quadratische Form Q aus?

(c) Führen Sie für Q eine Hauptachsentransformation durch.

(d) Was sind die Hauptachsen der quadratischen Hyperfläche und von welchem Typ ist sie?

(e) Skizzieren Sie die quadratische Hyperfläche.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Q : V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Form. Zeigen Sie, dass dann für alle $x, y \in V$

$$Q(x + y) + Q(x - y) = 2(Q(x) + Q(y))$$

gilt.

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Wir betrachten in dieser Aufgabe die Abbildungen

$$Q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1x_2 - x_2x_3 \qquad \text{und}$$

$$Q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3\,.$$

(a) Sind Q_1 bzw. Q_2 quadratische Formen? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(b) Eine quadratische Form $Q : V \to \mathbb{K}$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt positiv definit, wenn für alle $x \in V \setminus \{0\}$

$$Q(x) > 0$$

gilt.
Sind Q_1 bzw. Q_2 positiv definit? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.