Lineare Algebra II
1. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dipl. Math. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
22./23. Oktober 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Beweisen oder widerlegen Sie:

i. Seien $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums und λ ein Eigenwert von ϕ. Dann ist die Abbildung $\phi - \lambda\,\mathrm{id}$ bijektiv.

ii. Seien $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus und $0 \neq v \in V$ ein Vektor mit $\phi(-v) = \lambda v$. Dann sind v und $-v$ Eigenvektoren von ϕ.

(b) Was sind die Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}?$$

Aufgabe G2

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Diagonalmatrix genau die Diagonaleinträge sind. Was sind die zugehörigen Eigenvektoren?

Aufgabe G4

Sei v ein Eigenvektor einer Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:

(a) Ist A invertierbar, so gilt $\lambda \neq 0$ und v ist ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(b) Für jeden Skalar μ ist v ein Eigenvektor von $A - \mu E$ zu Eigenwert $\lambda - \mu$.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist v ein Eigenvektor von A^n zum Eigenwert λ^n.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)

Berechnen Sie für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Determinante der $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ sie invertierbar ist.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie damit eine invertierbare Matrix S, so dass $D := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Berechnen Sie A^{13}.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Sei V ein Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\phi^2 = \phi$.

(a) Zeigen Sie, dass ϕ nur Eigenwerte 0 und 1 haben kann.

(b) Wie viele Endomorphismen $\phi : V \to V$ mit $\phi^2 = \phi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 0 haben?

(c) Wie viele Endomorphismen $\phi : V \to V$ mit $\phi^2 = \phi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 1 haben?