Lineare Algebra II
1. Tutoriumsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Schneider
Dipl.-Math. Dominik Kremer

Wintersemester 2012/13
25.10.2012

Aufgabe T1 (Wege zur Determinante)
Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

auf folgende Weisen:

(a) Mit der Definition,

(b) mit der Regel von Sarrus,

(c) durch Entwicklung nach einer Zeile oder Spalte und

(d) indem Sie A durch Anwendung der Determinanteneigenschaften in Dreiecksgestalt bringen.

Aufgabe T2 (Basiswechsel)
Wir betrachten die $\mathbb{R}$-Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ und in diesen die Basen

$$B = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } C = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

und die Standardbasen

$$E_2 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \text{ bzw. } E_3 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Eine lineare Abbildung $\psi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ ist gegeben durch

$$[\psi]_B^C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie $[\psi]_{E_2}^{E_3}$.

(b) Gegeben sei weiterhin ein Vektor $v \in \mathbb{R}^3$ durch $[v]_{E_3} := \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}$. Bestimme $[\psi(v)]_B$.

Aufgabe T3 (Basiswechsel)
Wie gewöhnlich bezeichne $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ die Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad kleiner gleich n. Wir betrachten die Abbildung

$$\varphi : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \quad \text{mit} \quad \varphi(p) := X \cdot p,$$

die Elemente $p_i := X^i$, $q_i := (X+1)^i$ für $i = 0, 1, \ldots, 3$ und die Basen

$$\begin{aligned} B &:= (p_0, p_1, p_2), \\ C &:= (p_0, p_1, p_2, p_3), \\ C' &:= (q_0, q_1, q_2, q_3) \end{aligned}$$

von $\mathscr{P}_2(\mathbb{R})$ bzw. von $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie $[\varphi]_C^B$ und $[\varphi]_{C'}^B$.

Aufgabe T4 (Determinante einer Abbildung)
Wir betrachten die folgende Abbildung:

$$M\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \longrightarrow \mathbb{R}^{2\times 2}, \qquad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a-6b+4c+3d & 2b+c+3d \\ -3b+2d & d-b \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie $\det M$.

Aufgabe T5 (Nilpotente Abbildungen)
Sei $\varphi : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ eine nilpotente lineare Abbildung, es gelte also $\varphi^d \equiv 0$ für ein $d \in \mathbb{N}$, aber $\varphi^r \not\equiv 0$ für $r < d$. Zeigen Sie, dass es eine Basis $\mathscr{B}$ gibt, bezüglich der φ strikt obere Diagonalgestalt hat, also von der folgenden Form ist:

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Anleitung:

(a) Zeigen Sie für $V_k := \operatorname{im} \varphi^{d-k}$ die folgende Kette von Inklusionen:

$$\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \ldots \subseteq V_{d-1} \subseteq V_d = \mathbb{K}^n.$$

(b) Wählen Sie eine Basis von V_1, ergänzen Sie diese zu einer Basis von V_2 und fahren Sie fort, bis Sie eine Basis B von $\mathbb{K}^n$ gefunden haben.

(c) Zeigen Sie, dass φ in dieser Basis strikte obere Diagonalgestalt hat.