Klausur zu „Lineare Algebra II“

TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider

WS 2012/13

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	2	2	4	3	3	3	3	20		
erreichte Punktzahl										

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Alle Lösungsschritte sind zu begründen.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (2 Punkte)

(a) Was besagt der *Satz von Cayley-Hamilton*.

(b) Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und ϕ ein Endomorphismus von V. Geben Sie eine mathematische Definition der *Adjungierten von* ϕ.

2. Aufgabe (2 Punkte)

(a) Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende komplexe Matrix diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}.$$

(b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren folgender komplexer Matrix gibt:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1-i \\ -i & 2i & 1 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des entsprechenden Eigenraums.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie den Vektorraum der komplexen $n \times n$-Matrizen $M_n(\mathbb{C})$ sowie die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(AB^*)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $(M_n(\mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ an.

5. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie $\mathbb{C}^3$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle := \sum_{k=1}^{3} k v_i \overline{w_i}$$

und bestimme Sie durch eine Rechnung eine Orthonormalbasis des Orthogonalkomplements von

$$\mathbb{C}\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

6. Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $A \in O_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie:
Es gilt $\det(A) > 0$ genau dann, wenn es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ gibt mit $B^2 = A$.

7. Aufgabe (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Hauptachsen der Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_3 = 1\}$$

und skizzieren Sie die Quadrik in einem geeigneten Koordinatensystem.