Klausur zu „Lineare Algebra II“

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider

WS 2012/13

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	$\sum$	Bonus	Note
Punktzahl	2	2	4	3	3	3	3	20		
erreichte Punktzahl										

Es sind keine Hilfsmittel zugelassen.
Die Bearbeitungszeit beträgt 90 Minuten.
Alle Lösungsschritte sind zu begründen.

Viel Erfolg!

1. Aufgabe (2 Punkte)

(a) Was besagt der *Satz von Cayley-Hamilton*.

(b) Es sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt und ϕ ein Endomorphismus von V. Geben Sie eine mathematische Definition der *Adjungierten von* ϕ.

Lösung:

(a) Jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{F})$ ist Nullstelle ihres charakteristischen Polynoms, d. h. es gilt $p_A(A) = 0$.

(b) Die Adjungierte ist eine Abbildung ϕ^* für die für alle $x, y \in V$ gilt

$$\langle x, \phi(y)\rangle = \langle \phi^*(x), y\rangle.$$

2. Aufgabe (2 Punkte)

(a) Entscheiden Sie mit Begründung, ob die folgende komplexe Matrix diagonalisierbar ist:

$$\begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix}.$$

(b) Entscheiden Sie mit Begründung, ob es eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren folgender komplexer Matrix gibt:

$$\sigma := \begin{pmatrix} 0 & i & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Die Matrix hat zwei verschiedene Eigenwerte 0 und $2i$ und ist daher diagonalisierbar.

(b) Die Eigenwerte sind 0 (mit algebraischer Vielfachheit 2) und 1 (mit Vielfachheit 1). Der Eigenraum zum Eigenwert 0 ist $\ker \sigma = \operatorname{Span}\{(1,0,0)^T\}$ und damit 1-dimensional. Es gibt also keine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Betrachten Sie die komplexe Matrix

$$A := \begin{pmatrix} 1+i & 0 & -1-i \\ -i & 2i & 1 \\ 1+i & 0 & 1+i \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie alle Eigenwerte von A.

(b) Bestimmen Sie für jeden Eigenwert von A eine Basis des entsprechenden Eigenraums.

(c) Bestimmen Sie das Minimalpolynom von A.

Alle Antworten sind zu begründen, etwa durch eine Rechnung.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A lautet

$$p_A(t) = \det(A - tI) = -t^3 + (2+4i)t^2 + (4-8i)t - 8 = (2-t)(2i-t)^2$$

und hat die Nullstellen $\lambda_1 = 2$ (einfach) und $\lambda_2 = 2i$ (doppelt).

(b) Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist $\mathsf{Span}\{(-i,0,1)^T\}$, für den Eigenwert $2i$ erhält man $\mathsf{Span}\{(0,1,0)^T\}$.

(c) Als Minimalpolynom kommen nur $(t-2)(t-2i)$ und $(t-2)(t-2i)^2$ in Frage. Man rechnet nach, dass $(A-2E)(A-2iE) \neq 0$. Somit ist das Minimalpolynom $m_A(t) = (t-2)(t-2i)^2$.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie den Vektorraum der komplexen $n \times n$-Matrizen $M_n(\mathbb{C})$ sowie die Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ definiert durch

$$\langle A, B \rangle := \mathrm{Tr}(AB^*)$$

(a) Zeigen Sie, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ein Skalarprodukt ist.

(b) Geben Sie eine Orthonormalbasis von $(M_n(\mathbb{C}), \langle \cdot, \cdot \rangle)$ an.

Lösung:

(a) Wir weisen die Axiome des Skalarprodukts nach: Seien $A, B, C \in M_n(\mathbb{C}), \lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
   i. Sesquilinearität: $\langle \lambda A + \mu B, C \rangle = \mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B)C^* = \lambda \, \mathrm{Tr} AC^* + \mu \, \mathrm{Tr} BC^* = \lambda \langle A, C \rangle + \mu \langle B, C \rangle$
   ii. Antisymmetrie: $\langle AB, = \rangle \, \mathrm{Tr} AB^* = \mathrm{Tr}((AB^*)^*)^* = \mathrm{Tr}(BA^*)^* = \overline{\mathrm{Tr} BA^*} = \overline{\langle B, A \rangle}$
   iii. Definitheit: $\langle A, A \rangle = \mathrm{Tr} AA^* = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} \overline{a_{ij}} \geq 0$ und $\langle A, A^* \rangle = 0 \iff A = 0$.

(b) Definiere $A_{ij} \in M_n(C)$ durch $a_{ij} = 1$ und $a_{k\ell} = 0$ für $k \neq i, \ell \neq j$. Dann ist

$$\langle A_{ij}, A_{ij} \rangle = \mathrm{Tr} A_{ii} = 1$$

und

$$\langle A_{ij}, A_{k\ell} \rangle = \mathrm{Tr}\, 0 = 0.$$

Also bilden die Matrizen $A_{ij}, i, j = 1, \ldots, n$ eine Orthonormalbasis.

5. Aufgabe (3 Punkte)

Betrachten Sie $\mathbb{C}^3$ versehen mit dem Skalarprodukt

$$\langle v, w \rangle := \sum_{k=1}^{3} k v_i \overline{w_i}$$

und bestimme Sie durch eine Rechnung eine Orthonormalbasis des Orthogonalkomplements von

$$\mathbb{C} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Ein Vektor $x = (x_1, x_2, x_3)^T$ ist genau dann im Orthogonalkomplement von $\mathbb{C}(1, i, 1)^T$, wenn

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1 - 2ix_2 + 3x_3 = 0$$

gilt. Eine Basis von $((1, i, 1)^T)^\perp$ ist

$$b_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Mit Gram-Schmidt erhält man die Orthonormalbasis

$$v_1 = \tfrac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \tfrac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} i \\ 2 \\ i \end{pmatrix}.$$

6. Aufgabe (3 Punkte)

Es sei $A \in O_n(\mathbb{R})$ eine orthogonale Matrix. Zeigen Sie:
Es gilt $\det(A) > 0$ genau dann, wenn es eine Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ gibt mit $B^2 = A$.

Lösung: Sei zunächst $B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B^2 = A$. Dann ist $\det A = \det B^2 = (\det B)^2 > 0$.
Sei umgekehrt $\det A > 0$ (also $\det A = 1$).
Dann kann man A durch einen geeigneten Basiswechsel schreiben als

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & A_k & & & \\ & & & \pm 1 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & \pm 1 \end{pmatrix}$$

mit orthogonalen 2×2-Rotationsmatrizen $A_i, i = 1, \dots, k$ (d. h. $\det A_i = 1$ für alle i) und einer geraden Anzahl an -1-Einträgen.
Wir können A in 2×2-Blöcke A_i mit Determinante 1 zerlegen, für die wir die Behauptung zeigen:

$$A_i = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix},$$

also eine orthogonale 2×2-Matrix C mit Determinante 1. (Die -1-Elemente kann man als $\left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ebenfalls in diese Form bringen.)
Für

$$B_i = \begin{pmatrix} \cos \frac{t}{2} & -\sin \frac{t}{2} \\ \sin \frac{t}{2} & \cos \frac{t}{2} \end{pmatrix}$$

(also eine Drehung um den Winkel $\frac{t}{2}$) gilt dann $B_i^2 = A_i$.

7. Aufgabe (3 Punkte)

Bestimmen Sie die Hauptachsen der Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2\sqrt{3}x_1x_3 = 1\}$$

und skizzieren Sie die Quadrik in einem geeigneten Koordinatensystem.

Lösung: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\sqrt{3} & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $Q = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x^T A x = 1\}$. Der charakteristische Polynom lautet

$$p_A(t) = -t^3 + 2t^2 + 4t - 8 = -(t-2)^2(t+2),$$

die Eigenwerte sind also 2 (doppelt) und -2. Es handelt sich also um ein einschaliges Hyperboloid. Der Eigenraum zum Eigenwert 2 ist $\mathsf{Span}\{(-\sqrt{3},0,1)^T, (0,1,0)^T\}$, der zum Eigenwert -2 ist $\mathsf{Span}\{(\frac{1}{\sqrt{3}},0,1)^T\}$.