Lineare Algebra II
9. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
17./18. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Die Bilinearform $F\colon \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch $(x,y) \mapsto x^T A y$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum $\{0\} \neq U \subseteq \mathbb{R}^3$, so dass für jedes $x \in U$ die Abbildung

$$f_x\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, \qquad f_x(y) := F(x,y)$$

identisch Null ist, d.h. $f_x(y) = 0$ für alle $y \in \mathbb{R}^3$ erfüllt?
(In einem solchen Fall nennt man die Bilinearform ausgeartet.)

(b) Sei jetzt $G\colon \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^T B y$ mit

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Gibt es einen Unterraum U wie in (a), d.h. so, dass $g_x(y) := G(x,y) \equiv 0$ für alle $x \in U$?

(c) Sei Q die G entsprechende quadratische Form $Q(x) := G(x,x)$. Für welche Unterräume $\{0\} \neq U$ von $\mathbb{R}^2$ ist die auf U eingeschränkte Abbildung $Q|_U : U \to \mathbb{R}$ identisch Null, d. h. $Q(u) = 0$ für alle $u \in U$?

Lösung:

(a) Es ist

$$f_x(y) = 0 \iff \langle Ay, x\rangle = 0 \iff \langle y, A^T x\rangle = 0 \iff \langle y, Ax\rangle = 0$$

für alle $y \in \mathbb{R}^3$. Dies ist genau dann der Fall, wenn $Ax = 0$ gilt, wenn also x ein Eigenvektor von A zum Eigenwert Null ist. Offensichtlich ist $\det A = 0$, denn die Summe der ersten beiden Spalten ergibt die dritte Spalte. Der gesuchte Raum U ist also einfach der Eigenraum von A zum Eigenwert 0 und wird zum Beispiel von $(1,1,-1)^T$ erzeugt.

(b) Die G entsprechende Matrix B ist invertierbar, die Bilinearform also nicht entartet. Es gibt keinen Unterraum mit der Eigenschaft aus (a).

(c) Zunächst tranformieren wir B auf Diagonalgestalt. Die Eigenwerte von B sind -3 und 2, die entsprechenden Eigenvektoren lauten

$$v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix der Bilinearform in der Eigenvektorbasis ist daher

$$B' = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

Damit erhalten wir

$$Q(x,x)=0 \iff x \in U_\pm := \operatorname{span}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ \pm\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\right]_{(v_1,v_2)}.$$

Führen wir jetzt noch einen Basiswechsel in die Standardbasis durch, erhalten wir

$$U_+ = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ +\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -2+\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1+2\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

für die positive Wurzel und

$$U_- = \operatorname{span}\left(\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{span}\begin{pmatrix} -2-\sqrt{\frac{3}{2}} \\ 1-2\sqrt{\frac{3}{2}} \end{pmatrix}$$

für die negative Wurzel. Dies sind die beiden in der Aufgabe gesuchten Möglichkeiten.

Aufgabe G2

(a) Sei V endlichdimensional und $\phi : V \times V \to \mathbb{K}$ eine Bilinearform. Zeigen oder widerlegen Sie: ϕ ist genau dann symmetrisch, wenn es eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V gibt, so dass $\phi(v_i, v_j) = \phi(v_j, v_i)$ für alle $1 \le i, j \le n$ gilt.

(b) Sei V der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad ≤ 2 und

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \phi(f,g) := \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

eine symmetrische Bilinearform. Bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis.

(c) Sei V der Vektorraum der reellen 2×2-Matrizen. Betrachten Sie die Abbildung

$$\phi : V \times V \to \mathbb{R}, \qquad \phi(A,B) := \operatorname{tr}(AB).$$

Zeigen Sie, dass ϕ eine symmetrische Bilinearform ist und bestimmen Sie die Strukturmatrix von ϕ bezüglich einer geeigneten Basis.

(d) Sind die in (b) und (c) untersuchten Bilinearformen Skalarprodukte?

Lösung:

(a) Aus der Symmetrie auf V folgt trivialerweise die Symmetrie auf jeder Basis von V. Für die andere Implikation sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis, auf der ϕ symmetrisch ist, und seien $x, y \in V$. Dann gilt $x = \sum_{i=1}^n \xi_i v_i$ und $y = \sum_{i=1}^n \eta_i v_i$ mit $\xi_i, \eta_i \in \mathbb{K}$ für alle $1 \le i \le n$. Wir folgern

$$\phi(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j \phi(v_i, v_j) = \sum_{i,j=1}^{n} \xi_i \eta_j \phi(v_j, v_i) = \phi(y,x).$$

(b) Wir wählen als Basis $B := (1, x, x^2)$. Durch die Berechnung diverser Integrale erhält man

$$[\phi]_B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{pmatrix}.$$

(c)

$$\phi(A,B) = \operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA) = \phi(B,A)$$
$$\phi(A+\beta B, C) = \operatorname{tr}((A+\beta B)C) = \operatorname{tr}(AC+\beta BC) = \operatorname{tr}(AC) + \operatorname{tr}(\beta BC) = \operatorname{tr}(AC) + \beta \operatorname{tr}(BC) = \phi(A,C) + \beta\phi(B,C)$$

Wir wählen als Basis

$$B := \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

und berechnen die 10 auftretenden Matrixprodukte. Als Strukturmatrix erhalten wir

$$[\phi]_B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) Wir wissen bereits, dass die Bilinearform aus (b) ein Skalarprodukt ist.

Die Strukturmatrix von (c) ist orthogonal und damit diagonalisierbar. Die Determinante ist aber offensichtlich -1, so dass nicht alle Eigenwerte positiv sein können. Eigenvektoren v zum Eigenwert -1 erfüllen dann

$$\phi(v,v) = v^T(-v) = -v^T v = -\|v\|^2 < 0,$$

so dass diese Bilinearform nicht positiv definit sein kann.

Aufgabe G3 (Quadratische Formen)
Wir betrachten den reellen Vektorraum V der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen.

(a) Geben Sie ein Beispiel einer Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an, die $f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$ erfüllt, aber keine quadratische Form ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\det : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form ist.

(c) Bestimmen Sie die Strukturmatrix der mit $\det$ assoziierten Bilinearform bezüglich der Basis

$$B = \left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(d) Transformieren Sie die Strukturmatrix von $\det$ in eine Basis, bezüglich der sie Diagonalgestalt hat.

Lösung:

(a) Setzen wir etwa

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x_1, x_2) \mapsto \sqrt{x_1^4 + x_2^4},$$

dann gilt $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^2 f(x, y)$. Offensichtlich ist aber die Abbildung

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{2}\left(\sqrt{(x_1 + y_1)^4 + (x_2 + y_2)^4} - \sqrt{x_1^4 + x_2^4} - \sqrt{y_1^4 + y_2^4} \right)$$

nicht bilinear, also f keine quadratische Form.

(b) Wegen der Multilinearitätseigenschaft der Determinante ist $\det(\lambda A) = \lambda^2 \det A$. Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}$ ist die Abbildung

$$\begin{aligned} F(A, B) &:= \frac{1}{2}(\det(A + B) - \det A - \det B) \\ &= \frac{1}{2}(ad + ah + de + eh - bc - cf - bg - fg - (ad - bc) - (eh - gf)) \\ &= \frac{1}{2}(ah + de - (cf + bg)) \end{aligned}$$

offensichtlich bilinear (rechnen Sie es nach, wenn es Ihnen nicht klar ist!). Daraus folgt, dass $\det$ eine quadratische Form ist.

(c) Es ist

$$\begin{aligned} &F(B_1, B_1) = 0, && F(B_1, B_2) = F(B_2, B_1) = \frac{1}{2}, && F(B_1, B_3) = F(B_3, B_1) = 0, \\ &F(B_2, B_2) = 0, && F(B_2, B_3) = F(B_3, B_2) = 0, && F(B_3, B_3) = -1. \end{aligned}$$

Die Strukturmatrix lautet daher

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(d) Die Eigenwerte lauten -1, $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Die zugehörigen Eigenräume werden aufgespannt durch

$$v_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Die gewünschte Diagonalgestalt lautet daher

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G4
Zeigen Sie, dass es sich bei der folgenden Quadrik im $\mathbb{R}^2$ um eine Ellipse handelt.

$$\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, 3x^2 + 2xy + 3y^2 = 1 \right\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und skizzieren Sie die Quadrik.

Lösung: Man bestimmt zunächst die Eigenwerte der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $P_A(t) = (3-t)^2 - 1$, die Eigenwerte sind 2 und 4. Dies zeigt, dass es sich um eine Ellipse handelt. Wir berechnen die Eigenräume von A.

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \ker \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies sind die Hauptachsen.