Lineare Algebra II
8. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
10./11. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Warum gibt es eine unitäre Matrix Q, so dass für

$$A := \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix}$$

die Matrix $A' = Q^{-1} A\, Q$ eine Diagonalmatrix ist?

Lösung: A ist normal, denn es gilt

$$AA^* = \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i & -i & 1 \\ i & -i & i \\ 1 & -i & -i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -i & 1 \\ i & 3 & i \\ 1 & -i & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & -i & 1 \\ i & -i & i \\ 1 & -i & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i & -i & 1 \\ i & i & i \\ 1 & -i & i \end{pmatrix} = A^*A\,.$$

Aus dem Hauptsatz über normale Matrizen folgt dann die unitäre Diagonalisierbarkeit.

Aufgabe G2
Sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ eine komplexe Matrixen. Zeigen Sie: A ist genau dann normal, wenn $A + A^*$ und $A - A^*$ kommutieren.

Lösung: Nachrechnen.

Aufgabe G3
Seien V ein endlich-dimensionaler unitärer Vektorraum und $\phi, \psi \in \mathsf{End}(V)$ Endomorphismen. Zeigen Sie:

(a) $(\phi^*)^* = \phi$

(b) $(\lambda\phi + \mu\psi)^* = \overline{\lambda}\phi^* + \overline{\mu}\psi^*$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$

(c) $(\phi \circ \psi)^* = \psi^* \circ \phi^*$

(d) $\ker \phi^* = (\mathrm{Bild}\, \phi)^\perp$

(e) $\mathrm{Bild}\, \phi = (\ker \phi^*)^\perp$

Lösung: Nachrechnen. (Endomorphismen als Matrizen schreiben.)

Aufgabe G4
Es sei

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie eine orthogonale Matrix P an, für die $P^T A P$ eine Diagonalmatrix ist und berechnen Sie $P^T A P$.

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 2 \\ 2 & 1-t \end{pmatrix} = (1-t)^2 - 4 = t^2 - 2t - 3 = (t-3)(t+1)\,.$$

Also sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 3$ die Eigenwerte von A.

Als zugehörige Eigenvektoren ergeben sich z.B.

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ und} v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} .$$

Normalisiert man diese Vektoren, so hat man die Spalten von einer möglichen orthogonalen Matrix P gefunden. Mit dieser Matrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

ergibt sich

$$P^T AP = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Hausübung

Aufgabe H1

Gegeben sei die reelle symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine orthogonale Matrix $Q \in \mathrm{O}(3)$, so dass $Q^T AQ$ Diagonalgestalt hat.

Lösung: Das charakteristische Polynom ergibt sich zu $t^3 - 2t^2 - 8t$, die Nullstellen sind $0, -2, 4$. Um eine Matrix Q mit den in der Aufgabe verlangten Eigenschaften zu bestimmen, berechnet man zu jedem Eigenwert einen Eigenvektor und normiert diesen jeweils auf Einheitslänge. Dies ergibt die Spalten von Q. Zum Eigenwert 0 erhält man

$$\ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert -2 erhält man

$$\ker \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & -4 & -8 \\ 0 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zum Eigenwert 4 erhält man

$$\ker \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 0 & 8 & -8 \\ 0 & -8 & 8 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} = \mathbb{R} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Als Matrix Q kann man z. B.

$$Q := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ 0 & -\frac{1}{3}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{6}\sqrt{6} & \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

wählen.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Sei $V_2 = \{\sum_{k=0}^{2} a_k t_k \mid a_k \in \mathbb{R}, 0 \le k \le k\}$ der Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 mit dem Skalarprodukt

$$\langle p, q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Berechnen Sie ϕ^* für $\phi(p) = p'$.
(b) Berechnen Sie ψ^* für $\psi(p) = p''$.

Lösung:

(a) Wir identifizieren V_2 mit $\mathbb{R}^3$ via $ax^2 + bx + c \mapsto \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}^T$. Dann ist $\langle p, q \rangle = p^T A q$ mit

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{1}{4} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Außerdem ist $\phi(p) = p' = Dp$ mit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir suchen eine Matrix D^*, sodass $\phi^*(p) = D^* p$. Es gilt also

$$\langle \phi(p), q \rangle = (Dp)^T A q = p^T D^T A q = p^T A (D^* q) = \langle p, \phi^*(q) \rangle$$

und somit

$$D^* = A^{-1} D^T A = \begin{pmatrix} 30 & 30 & 0 \\ -26 & -24 & -12 \\ 3 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$

Damit gilt also $\phi^*(ax^2 + bx + c) = (30a + 30b)x^2 - (26a + 24b + 12c)x + (3a + 2b - c)$.

(b) Analog zu (a) mit

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$D^* = \begin{pmatrix} 120 & 180 & 360 \\ -120 & -180 & -360 \\ 20 & 30 & 60 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Zeigen Sie: Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist genau dann normal, wenn es ein Polynom $p \in \mathbb{C}[t]$ gibt, sodass $A^* = p(A)$.

Lösung: Gilt $A^* = p(A)$, so ist A normal.

Sei umgekehrt A normal mit den Eigenwerten $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Da A normal ist, gibt es eine unitäre Matrix Q, sodass $A = QDQ^*$ für

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Sei $p = \sum_{i=0}^{n-1} b_i t^i \in \mathbb{C}[t]$ das (eindeutige) Polynom vom Grad $n-1$ mit $p(\lambda_i) = \overline{\lambda_i}$ für alle i. Dann gilt

$$\begin{aligned} p(A) = p(QDQ^*) &= \sum_{i=1}^{n} b_i (QDQ^*)^i \\ &= Q \left(\sum_{i=1}^{n} b_i D^i \right) Q = Qp(D)Q^* \\ &= Q \begin{pmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{pmatrix} Q^* = Q \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix} Q^* = A^*. \end{aligned}$$