Lineare Algebra II
7. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
3./4. Dezember 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Entscheiden Sie bei den folgenden Matrizen, ob sie symmetrisch, schiefsymmetrisch, unitär, orthogonal, hermitesch, selbstadjungiert, schiefhermitesch, normal oder diagonalisierbar sind.

$$M_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_2 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_3 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M_4 := \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$$
$$M_5 := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad M_6 := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad M_7 := \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \qquad M_8 := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

Lösung:

Eigenschaft	**Matrizen**
symmetrisch	M_1, M_2, M_6, M_8
schiefsymmetrisch	M_2, M_5
unitär	M_1, M_4, M_5, M_6, M_8
orthogonal	M_1, M_4, M_5
hermitesch = selbstadjungiert	M_1, M_2, M_7
schiefhermitesch	M_2, M_5, M_8
normal	M_1, M_2, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8
diagonalisierbar	M_1, M_2, M_4, M_5, M_6, M_7, M_8

Die ersten sechs Eigenschaften lesen wir direkt aus den Matrizen ab. Da unitäre und hermitesche Matrizen normal sind, wissen wir bei allen Matrizen außer M_3, dass sie normal sind. Die Matrix M_3 kann nicht normal sein, denn sie ist bekannterweise nicht diagonalisierbar. Alle normalen Matrizen sind aber diagonalisierbar, so dass auch in dieser Zeile alle Matrizen außer M_3 stehen müssen.

Aufgabe G2

(a) Seien A eine komplexe $(n \times m)$-Matrix und B eine komplexe $(m \times n)$-Matrix. Zeigen Sie, dass genau dann $B = A^*$ gilt, wenn für alle $x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$ bzgl. des Standardskalarprodukts gilt

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, By \rangle.$$

(b) Zeigen Sie: Eine $(n \times n)$-Matrix ist genau dann normal, wenn $\langle Ax, Ay \rangle = \langle A^*x, A^*y \rangle$ für alle $x, y \in \mathbb{C}^n$ gilt.

Lösung:

(a) Es gilt $\langle Ax, y \rangle = (Ax)^T \overline{y} = x^T A^T \overline{y} = x^T (\overline{A^* y}) = \langle x, A^* y \rangle$. Nach Voraussetzung gilt dann $\langle x, A^* y \rangle = \langle x, By \rangle$ für alle Vektoren x, y. Für $x = A^* y + By$ gilt also

$$\begin{aligned} 0 &= \langle A^*y - By, A^*y \rangle - \langle A^*y - By, By \rangle = \langle A^*y, A^*y \rangle - \langle By, A^*y \rangle - \langle A^*y, By \rangle + \langle By, By \rangle \\ &= \langle A^*y - By, A^*y - By \rangle. \end{aligned}$$

Aus der Definitheit des Skalarprodukts folgt dann $A^* y = By$ für alle $y \in \mathbb{C}^m$, also $B = A^*$.

(b) Ist A normal, so gilt mit dem zuvor gezeigten

$$\langle A^*x, A^*y\rangle = \langle AA^*x, y\rangle = \langle A^*Ax, y\rangle = \langle Ax, (A^*)^*y\rangle = \langle Ax, Ay\rangle.$$

Umgekehrt: Gilt $\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle$, so folgt mit dem zuvor Gezeigten für alle $x \in \mathbb{C}^n, y \in \mathbb{C}^m$

$$\langle x, A^*Ay\rangle = \langle Ax, Ay\rangle = \langle A^*x, A^*y\rangle = \langle x, AA^*y\rangle.$$

Aus der Definitheit des Skalarprodukts ergibt sich dann $A^*Ay = AA^*y$ für alle $y \in \mathbb{C}^m$, d. h. $A^*A = AA^*$.

Aufgabe G3

Wir betrachten den euklidischen Vektorraum $M_n(\mathbb{R})$ aller $(n \times n)$-Matrizen mit dem Spur-Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^TA)$. Bezeichne mit $U_+ \subseteq M_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der symmetrischen und mit $U_- \subseteq M_n(\mathbb{R})$ die Teilmenge der schiefsymmetrischen Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass U_+ und U_- lineare Teilräume sind und dass $(U_+)^\perp = U_-$ gilt.

(b) Zeigen Sie, dass sich jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eindeutig als Summe $A = A_+ + A_-$ aus einer symmetrischen Matrix A_+ und einer schiefsymmetrischen Matrix A_- schreiben lässt.

(c) Bestimmen Sie die orthogonalen Projektionen π_+ auf den Teilraum U_+ und π_- auf den Teilraum U_-.

Lösung: Wir verwenden oft, dass für alle $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ gilt

$$\langle X, Y\rangle = \mathrm{Tr}\, Y^TX = \mathrm{Tr} X^TY = \mathrm{Tr}\, YX^T = \langle X^T, Y^T\rangle.$$

(a) Dass U_+ und U_- lineare Teilräume sind, rechnet man einfach nach. Wir zeigen $U_+^\perp = U_-$. Seien hierfür $A \in U_+$ und $B \in U_-$. Dann gilt

$$\langle A, B\rangle = \langle A^T, B^T\rangle = -\langle A, B\rangle,$$

also $\langle A, B\rangle = 0$. Für die Teilräume U_+ und U_- gilt somit $U_- \subseteq U_+^\perp$. Für die umgekehrte Inklusion sei $A \in U_+^\perp$, d. h. $\langle A, B\rangle = 0$ für alle $B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B^T = B$. Dann gilt für alle $X \in M_n(\mathbb{R})$

$$\langle A + A^T, X\rangle = \langle A, X\rangle + \langle A^T, X\rangle = \langle A, X\rangle + \langle A, X^T\rangle = \langle A, X + X^T\rangle = 0,$$

denn die Matrix $X + X^T$ ist symmetrisch. Aus der Definitheit des Skalarprodukts (man kann ja $X = A + A^T$ setzen) ergibt sich dann $A + A^T = 0$, d. h. $A \in U_-$.

(b) Da U_+ und U_- orthogonal zueinander sind, gilt $M_n(\mathbb{R}) = U_+ \oplus U_-$, d. h. jede Matrix lässt sich eindeutig als Summe einer Matrix aus U_+ und einer aus U_- schreiben.

(c) Die orthogonalen Projektionen sind durch $\pi_+(A) = \frac{1}{2}(A + A^T)$ und $\pi_-(A) = \frac{1}{2}(A - A^T)$ gegeben.

Aufgabe G4

Betrachten Sie den unitären Vektorraum $M_2(\mathbb{C})$ mit dem Spur-Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}(B^*A)$. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $M_2(\mathbb{C})$, die die Matrix

$$\frac{1}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i & 1+i \\ 2i & 0 \end{pmatrix}$$

enthält.

Lösung: Wir ergänzen die gegebene Matrix A_1 zu einer Basis von $M_2(\mathbb{C})$ durch

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auf diese Basis wenden wir das Gram-Schmidt-Verfahren an und erhalten

$$\begin{aligned} B_1 &= A_1, \\ B_2 &= \frac{1}{4}\sqrt{\frac{1}{3}}\begin{pmatrix} 2i & 6 \\ -2-2i & 0 \end{pmatrix}, \\ B_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ B_4 &= A_4. \end{aligned}$$

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)

(a) Bestimmen Sie alle komplexen $(n \times n)$-Matrizen, die symmetrisch und schiefhermitesch sind.

(b) Bestimmen Sie alle reellen (2×2)-Matrizen, die orthogonal und symmetrisch sind.

Lösung:

(a) Für eine solche Matrix muss gelten $A^T = A = -A^* = -\overline{A}^T$ und somit $A = -\overline{A}$. Die Matrix ist also symmetrisch mit rein imaginären Einträgen. Umgekehrt ist auch jede symmetrische Matrix $A = A^T$ mit rein imaginären Einträgen schiefhermitesch.

(b) Nach Aufgabe G4 vom 5. Übungsblatt sind alle reellen orthogonalen Matrizen von einer der Formem

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

mit $\alpha \in [0, 2\pi[$. Ist die Matrix von der rechten Form, so ist sie auch symmetrisch. Matrizen der linken Form sind genau dann symmetrisch, wenn $\sin\alpha = -\sin\alpha = 0$ gilt, also für $\alpha = 0$ oder $\alpha = \pi$. Es gilt also die folgenden orthogonalen, symmetrischen (2×2)-Matrizen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$$

für $\alpha \in [0, 2\pi[$.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Man betrachte für $\lambda \in \mathbb{C}$

$$V(\lambda, *) = \{A \in M_n(\mathbb{C}) \mid A^* = \lambda A\}.$$

(a) Bestimmen Sie alle $A \in V(\lambda, *)$ für $|\lambda| \neq 1$.

(b) Zeigen Sie: Für $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ gibt es ein $z = z(\lambda) \in \mathbb{C}$ mit $V(\lambda, *) = z \cdot V(+1, *) = \{z \cdot A \mid A^* = A\}$ und bestimmen Sie $z(-1)$.

Lösung:

(a) Aus $A^* = \lambda A$ folgt, das A normal ist. Somit gibt es (nach dem Hauptsatz über normale Matrizen) eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_n$ aus Eigenvektoren zu den Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Ist ein Eigenwert ungleich 0, etwa $\lambda_1 \neq 0$, so gilt (nach Lemma 9.1.9) $A^* v_1 = \overline{\lambda_1} v_1$ und somit $\lambda A v_1 = \overline{\lambda_1} v_1$, also $\lambda = \frac{\overline{\lambda_1}}{\lambda_1}$ und damit $|\lambda| = 1$.
Es müssen also alle Eigenwerte von A gleich 0 sein, also $A = 0$.

(b) Für $\lambda = e^{i\gamma}$ setze $z = e^{-i\frac{\gamma}{2}}$. Ist $A \in M_n(\mathbb{C})$ selbstadjungiert, so gilt dann $(zA)^* = e^{i\frac{\gamma}{2}} A^* = e^{i\frac{\gamma}{2}} A = e^{i\gamma}(zA)$.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für eine reelle $(n \times n)$-Matrix P die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(i) Es gilt $P^2 = P = P^T$.

(ii) Die Matrix P ist symmetrisch und hat keine von 0 und 1 verschiedenen Eigenwerte.

(iii) Die durch P gegebene Abbildung $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : x \mapsto Px$ ist eine orthogonale Projektion.
Hinweis: Auf welchen Teilraum projiziert P?

Lösung: Für die Implikation (i) $\Longrightarrow$ (ii) müssen wir zeigen, dass 0 und 1 die einzigen möglichen Eigenwerte sind. Sei $x \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor von P zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\lambda x = Px = P^2 x = \lambda P x = \lambda^2 x$. Wegen $x \neq 0$ folgt daraus $\lambda^2 = \lambda$, also $\lambda \in \{0, 1\}$.

Wir zeigen nun (ii) $\Longrightarrow$ (iii). Bezeichne U den Eigenraum zum Eigenwert 1. Nach dem Hauptsatz für symmetrische Matrizen zerfällt $\mathbb{R}^n$ in einen orthogonale Summe der Eigenräume, d. h. $\mathbb{R}^n = U \oplus U^\perp$. Wir wählen eine Orthonormalbasis $x_1, \ldots, x_k$ von U und ergänzen zu einer Orthonormalbasis $x_1, \ldots, x_n$ von $\mathbb{R}^n$. Die Vektoren $x_{k+1}, \ldots, x_n$ liegen dann im Eigenraum zum Eigenwert 0. Für jeden Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ gilt dann $x = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle x_i$ und somit

$$Px = \sum_{i=1}^n \langle x, x_i \rangle P x_i = \sum_{i=1}^k \langle x, x_i \rangle x_i + 0,$$

d. h. P ist eine orthogonale Projektion.

Die Implikation (iii) $\Longrightarrow$ (i) kann man direkt nachrechnen.