Lineare Algebra II
6. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
26./27. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

Beweisen Sie den **Satz vom Fußball**:

In jedem Fußballspiel gibt es zwei Punkte auf dem Fußball, die sich zu Beginn beider Halbzeiten an derselben Stelle befinden.

Lösung: Die Bewegung des Balls während des Spiels (bzw. während der ersten Halbzeit) besteht aus Drehungen und Translationen. Die Translation ist dabei unerheblich, da sie durch das Positionieren des Balls am Anstoßpunkt ausgeglichen wird. Alle Drehungen sind aber Elemente der $SO_3(\mathbb{R})$. Somit lassen sich alle in einer Halbzeit ausgeführten Drehungen als Hintereinanderausführung von Elementen der $SO_3(\mathbb{R})$ und somit als eine einzige Drehung beschreiben. Also gibt es zwei Punkte (die Schnittpunkte der Drehachse mit dem Ball), die sich an derselben Stelle befinden.

Aufgabe G2

(a) Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal?

$$\begin{pmatrix}1\end{pmatrix}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}, \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie alle reellen, orthogonalen oberen $(n \times n)$-Dreiecksmatrizen.

Lösung:

(a) Eine Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn $A^T A = E$ ist. Man erhält

$$\begin{pmatrix}1\end{pmatrix} \text{ ist orthogonal,} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \text{ ist orthogonal,} \qquad \begin{pmatrix}1 & -5\\ 5 & 1\end{pmatrix} \text{ ist } \textit{nicht} \text{ orthonogal,}$$

$$\begin{pmatrix}\frac{5}{13} & \frac{12}{13}\\ -\frac{12}{13} & \frac{5}{13}\end{pmatrix} \text{ ist orthogonal,} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \text{ ist } \textit{nicht} \text{ orthonogal,} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \text{ ist orthogonal.}$$

(b) Man erhält die Diagonalmatrizen mit ± 1-Einträgen.

Aufgabe G3

Es sei

$$A = \left\{ \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix} \right\}.$$

Berechnen Sie $A^\perp$ und $(A^\perp)^\perp$ bezüglich des Standardskalarprodukts im $\mathbb{R}^3$.

Lösung: Es ist bekannt, dass jedes Element $x \in \ker A$ senkrecht auf allen Zeilenvektoren der Matrix A steht und dass es keine weiteren Vektoren gibt, für die diese Aussage gilt. Daraus folgt, dass

$$A^{\perp} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

gilt. Die zugehörigen Umformungen des Gauß-Algorithmus sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -6 \\ 0 & -6 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D.h. es gilt

$$A^{\perp} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} (A^{\perp})^{\perp} &= \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle a, x \rangle = 0 \,\forall a \in A^{\perp}\} = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} x = 0\} = \left\{ \begin{pmatrix} 2\lambda - \mu \\ \lambda \\ \mu \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}. \end{aligned}$$

Aufgabe G4
Es seien V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A, B \subseteq V$ Teilmengen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) $A \subseteq B \Rightarrow B^{\perp} \subseteq A^{\perp}$

(b) $A \subseteq B^{\perp} \Leftrightarrow B \subseteq A^{\perp}$

Lösung:

(a) Es sei $A \subseteq B$ und $w \in B^{\perp} = \{v \in V \mid \langle x, v \rangle = 0 \,\forall x \in B\}$.
Dann gilt $\langle x, w \rangle = 0 \,\forall x \in B$ und wegen $A \subseteq B$ folgt daraus $\langle x, w \rangle = 0 \,\forall x \in A$. D.h. es gilt

$$w \in A^{\perp} = \{v \in V \mid \langle x, v \rangle = 0 \,\forall x \in A\}.$$

Daraus folgt die Behauptung

$$B^{\perp} \subseteq A^{\perp}.$$

(b) Es gelte $A \subseteq B^{\perp}$ D.h. es ist

$$A \subseteq B^{\perp} = \{v \in V \mid \langle x, v \rangle = 0 \,\forall x \in B\}.$$

D.h. für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt

$$\langle a, b \rangle = \overline{\langle b, a \rangle} = 0.$$

Also gilt für alle $b \in B$

$$b \in \{v \in V \mid \langle x, v \rangle = 0 \,\forall x \in A\} = A^{\perp}.$$

Das bedeutet es ist

$$B \subseteq A^{\perp}.$$

Damit ist

$$A \subseteq B^{\perp} \Rightarrow B \subseteq A^{\perp}$$

gezeigt. Die Umkehrung erhält man, indem man die Rollen von A und B vertauscht.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Sei V ein endlich-dimensionaler, euklidischer Vektorraum und $v \in V$ ein Einheitsvektor. Betrachten Sie die lineare Abbildung

$$\sigma_v : V \to V : x \mapsto x - 2\langle x, v\rangle v.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Abbildung σ_v ist orthogonal.

(b) Der von v aufgespannte Teilram $\mathrm{Span}\{v\} = \mathbb{R}v$ ist der Eigenraum von σ_v zum Eigenwert -1 und sein Orthogonalraum der Eigenraum zum Eigenwert 1.

(c) Wie kann man die Abbildung σ_v geometrisch interpretieren?

Lösung:

(a) Seien $w, w' \in V$. Dann gilt

$$\begin{aligned}\langle \sigma_v(w), \sigma_v(w')\rangle &= \langle w - 2\langle w, v\rangle v, w' - 2\langle w', v\rangle v\rangle \\ &= \langle w, w'\rangle - 2\langle w, v\rangle\langle v, w'\rangle - 2\langle w', v\rangle\langle w, v\rangle + 4\langle w, v\rangle\langle w', v\rangle \underbrace{\langle v, v\rangle}_{=1} \\ &= \langle w, w'\rangle.\end{aligned}$$

(b) Es gilt

$$\sigma_v(v) = v - 2\langle v, v\rangle v = v - 2v = -v.$$

Also ist v Eigenvektor zum Eigenwert -1.
Sei nun $w \in v^\perp$. Dann gilt

$$\sigma_v(w) = w - 2\langle w, v\rangle v = w.$$

Also ist w ein Eigenvektor zum Eigenwert 1.
Da $\dim v^\perp = \dim V - \dim \mathrm{Span}\{v\} = \dim V - 1$, hat man damit $\dim V$ linear unabhängige Eigenvektoren gefunden. Mehr kann es nicht geben.

(c) Die Abbildung ist eine Spiegelung an der Hyperebene mit Normalenvektor v.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Es seien V ein euklidischer oder unitärer Vektorraum und $A \subseteq V$ eine Teilmenge. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten.

(a) $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$

(b) $A^\perp = \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp$

Lösung:

(a) Es gilt

$$A^\perp = \{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in A\}.$$

Insbesondere ist also für alle $a \in A$ und $v \in A^\perp$

$$\langle v, a\rangle = \overline{\langle a, v\rangle} = 0.$$

Daraus und aus der Definition

$$\left(A^\perp\right)^\perp = \left\{w \in V \mid \langle v, w\rangle = 0 \,\forall v \in A^\perp\right\}$$

folgt, dass

$$a \in \left(A^\perp\right)^\perp \;\forall a \in A$$

gilt. D.h. es ist

$$A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp.$$

(b) Setzt man im Aufgabenteil (a) anstelle von A die Menge $A^\perp$ ein, so erhält man

$$A^\perp \subseteq \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp .$$

Sei nun

$$w \in \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp = \left\{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in \left(A^\perp\right)^\perp\right\} .$$

Dann folgt

$$\langle x, w\rangle = 0 \,\forall x \in \left(A^\perp\right)^\perp ,$$

woraus wegen $A \subseteq \left(A^\perp\right)^\perp$ (siehe Aufgabeteil (a))

$$\langle x, w\rangle = 0 \,\forall x \in A$$

folgt. D.h. es ist

$$w \in A^\perp = \{v \in V \mid \langle x, v\rangle = 0 \,\forall x \in A\} .$$

Das bedeutet es gilt auch

$$\left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp \subseteq A^\perp .$$

Zusammen ergibt sich

$$A^\perp = \left(\left(A^\perp\right)^\perp\right)^\perp .$$

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Sei $V = C([0,1])$ der Raum der stetigen Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ und $U = \mathrm{Span}\{1, x, x^2\}$ der Unterraum der Polynome vom Grad höchstens 2. Wir statten V mit dem Skalarprodukt

$$\langle f(x), g(x)\rangle := \int_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$$

aus. In dieser Aufgabe finden wir eine gute Näherung für die Funktion $x \mapsto e^x$ in U.

(a) Welche Dimension haben die Räume U und V?

(b) Berechnen Sie eine Orthonormalbasis von U.

(c) Benutzen Sie die Approximationseigenschaft der Orthogonalprojektion, um die optimale Näherung $g(x)$ für e^x zu berechnen.

(d) Skizzieren oder plotten Sie die Funktionen e^x und $g(x)$ in einem Koordinatensystem.

Beachten Sie, dass wir für die Bestimmung von $g(x)$ keine Differentialrechnung verwendet haben.

Hinweis: Es gilt $\int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1$ und $\int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x = e - 2$.

Lösung: Wir werden in dieser Aufgabe oft Skalarprodukte berechnen. Wegen der Linearität reicht uns die Berechnung von

$$\begin{aligned}
\langle 1,1\rangle &= \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = 1 & \langle 1,x\rangle &= \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\\
\langle x,x\rangle &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} & \langle 1,e^x\rangle &= \int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x = e-1\\
\langle e^x,e^x\rangle &= \int_0^1 e^{2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}e^2 - \frac{1}{2} & \langle x,e^x\rangle &= \int_0^1 xe^x\,\mathrm{d}x = 1\\
\langle 1,x^2\rangle &= \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} & \langle x,x^2\rangle &= \int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\\
\langle x^2,x^2\rangle &= \int_0^1 x^4\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5} & \langle x^2,e^x\rangle &= \int_0^1 x^2e^x\,\mathrm{d}x = e-2
\end{aligned}$$

aus, um alle auftretenden Produkte zu bestimmen.

(a) U hat natürlich Dimension 3, da 1, x und x^2 linear unabhängig sind. Die Dimension von V ist unendlich, denn es ist insbesondere $x^k \in V$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und diese Vektoren sind auch alle linear unabhängig.

(b) Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert uns (hoffentlich – modulo Rechenfehler)

$$
\begin{aligned}
v_0 &= 1 \\
v_1 &= \frac{x - \langle x, 1\rangle 1}{\|x - \langle x, 1\rangle 1\|} = \left(x - \tfrac{1}{2}\right) \cdot \left(\langle x, x\rangle - \langle x, 1\rangle + \tfrac{1}{4}\langle 1, 1\rangle\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}(2x-1) \\
v_2 &= \frac{x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle \sqrt{3}(2x-1)}{\|x^2 - \langle x^2, 1\rangle 1 - \langle x^2, \sqrt{3}(2x-1)\rangle \sqrt{3}(2x-1)\|} = \left(x^2 - x + \tfrac{1}{6}\right) \left(\langle x^2 - x + \tfrac{1}{6}, x^2 - x + \tfrac{1}{6}\rangle\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&= 6\sqrt{5}\left(x^2 - x + \tfrac{1}{6}\right) = \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)
\end{aligned}
$$

(c) Wir bestimmen die Darstellung $g(x) = \lambda_0 v_0 + \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2$, wobei $\lambda_i = \langle e^x, v_i\rangle$.
Es ist

$$\lambda_0 = \langle e^x, 1\rangle = e - 1,$$

$$\lambda_1 = \langle \sqrt{3}(2x-1), e^x\rangle = 2\sqrt{3}\langle x, e^x\rangle - \sqrt{3}\langle e^x, 1\rangle = 2\sqrt{3} - (e-1)\sqrt{3} = \sqrt{3}(3-e),$$

$$\lambda_2 = \langle e^x, \sqrt{5}(6x^2 - 6x + 1)\rangle = \sqrt{5}\,(6(e-2) - 6 + (e-1)) = \sqrt{5}(7e - 19).$$

Die beste Näherung ist also

$$g(x) = (e-1) + 3(3-e)(2x-1) + 5(6x^2 - 6x + 1)(7e - 19).$$

(d) Die Skizze der beiden Funktionen sieht so aus: