Lineare Algebra II
5. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
19./20. November 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

Betrachte $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T \in \mathbb{R}^4$ ein beliebiger Einheitsvektor. Zeigen Sie, dass die Vektoren

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ -x_4 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -x_4 \\ -x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_4 \\ -x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^4$ bilden.

Lösung: Nachrechnen.

Aufgabe G2

Wir betrachten $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von $U = \mathrm{Span}\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ mit

$$b_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad b_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad b_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

(b) Bestimmen Sie die orthogonale Projektion des Vektors $x = (1, 1, 1, 1)^T$ auf den Teilraum U.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Gram-Schmidtsche Orthogonalisierungsverfahren.
Es ergeben sich die folgenden Schritte:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= b_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T \\
v_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} = \frac{1}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2 + (-1)^2 + 1^2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_2 &= b_2 - \langle b_2, v_1 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T \\
v_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16} + \frac{9}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_3 &= b_3 - \langle b_3, v_1 \rangle v_1 - \langle b_3, v_2 \rangle v_2 \\
&= \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}^T - \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \right) \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T \\
v_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16}}} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}^T \\
u_4 &= b_4 - \langle b_4, v_1 \rangle v_1 - \langle b_4, v_2 \rangle v_2 - \langle b_4, v_3 \rangle v_3 = 0.
\end{aligned}
$$

Folglich ist (v_1, v_2, v_3) eine Orthonormalbasis von $U = \mathsf{Span}\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$.

(b) Wir erhalten die orthogonale Projektion von x auf U als

$$
\begin{aligned}
p_U(x) &= \sum_{i=1}^{3} \langle x, v_i \rangle v_i \\
&= 0v_1 + 2v_2 + 0v_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}^T.
\end{aligned}
$$

Aufgabe G3
Wir betrachten den Raum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ der reellen Polynomfunktionen. Zeigen Sie, dass durch

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x$$

ein Skalarprodukt auf $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ definiert ist.

Lösung: Wir müssen die Axiome des Skalarprodukts überprüfen. Bilinearität folgt sofort aus der Linearität des Integral, Symmetrie ist klar. Um Definitheit zu zeigen, sei $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein beliebiges Polynom. Dann gilt

$$\langle p, p \rangle = \int_{-1}^{1} \underbrace{p^2(x)}_{\geq 0}\,\mathrm{d}x \geq 0.$$

Da p stetig ist, folgt außerdem, dass $\langle p, p \rangle = 0$ nur für $p = 0$ gilt.

Aufgabe G4
Wir betrachten $\mathbb{R}^2$ mit dem Standardskalarprodukt.

(a) Sei $t \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sowohl durch

$$b_1^+ := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad b_2^+ := \begin{pmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \end{pmatrix} \tag{1}$$

als auch durch

$$b_1^- := \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \qquad b_2^- := \begin{pmatrix} \sin(t) \\ -\cos(t) \end{pmatrix} \tag{2}$$

eine Orthonormalbasis gegeben ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^2$ von der Form (1) oder (2) ist.

Lösung:

(a) Nachrechnen.

(b) Sei $(x_1, x_2)^T$ der erste Vektor der Orthonormalbasis. Dann gilt $-1 \leq x_1, x_2 \leq 1$ und $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Es gibt somit genau ein $t_x \in [0, 2\pi[$ mit $x_1 = \cos(t_x)$ und $x_2 = \sin(t_x)$. Analog gibt es für den zweiten Vektor $y = (y_1, y_2)^T$ genau ein $t_y \in [0, 2\pi[$ mit $y_1 = \cos(t_y)$ und $y_2 = \sin(t_y)$. Wegen der Orthogonalität gilt mit den Additionstheoremen

$$0 = \cos(t_x)\cos(t_y) + \sin(t_x)\sin(t_y) = \cos(t_x - t_y).$$

Die Winkel $t_x, t_y \in [0, 2\pi[$ unterscheiden sich also um $\frac{1}{2}\pi$ oder $\frac{3}{2}\pi$. Durch Nachrechnen der vier Fälle $t_y = t_x \pm \frac{1}{2}\pi$ und $t_y = t_x \pm \frac{3}{2}\pi$ ergibt sich die Behauptung.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Sei $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt versehen und sei $U \subset \mathbb{R}^4$ der von den Vektoren

$$u_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad u_3 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$$

aufgespannte Untervektorraum. Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U.

Lösung: Wir wenden das Gram-Schmidtsche Ortogonalisierungsverfahren an. Der erste Vektor muss lediglich auf Einheitslänge normiert werden:

$$v_1 := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den zweiten Vektor erhält man:

$$\tilde{v}_2 := u_2 - \langle v_1, u_2 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

sowie

$$v_2 := \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Für den dritten Vektor erhält man:

$$\tilde{v}_3 := u_3 - \langle v_1, u_3 \rangle v_1 - \langle v_2, u_3 \rangle v_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 9/2 \\ -9/2 \end{pmatrix}.$$

und somit

$$v_3 := \frac{\tilde{v}_3}{\|\tilde{v}_3\|} = \frac{2}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 9^2 + 9^2}}\,\tilde{v}_3 = \frac{1}{\sqrt{41}}\,\tilde{v}_3.$$

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Wir betrachten wieder den Raum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ der reellen Polynomfunktionen mit Skalarprodukt

$$\langle p, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)\,\mathrm{d}x.$$

(a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthogonalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis des Unterraums, der von den Funktionen p_0, p_1, p_2, p_3 mit $p_k(x) = x^k$ aufgespannt wird. Die so erhaltenen Polynome heißen (bis auf Normierung) *Legendre-Polynome*.

(b) Wir bezeichnen mit $U \subseteq V$ den von p_0, p_1, p_2 aufgespannten Teilraum. Bestimmen Sie die orthogonale Projektion von p_4 auf U.

Lösung:

(a) Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert die Vektoren

$$q_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad q_1(x) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}x, \quad q_2(x) = \sqrt{\tfrac{5}{8}}(3x^2-1), \quad q_3(x) = \sqrt{\tfrac{7}{8}}(5x^3-3x).$$

(b) Wir erhalten für die Projektion

$$\begin{aligned}
p_U(p_4) &= \sum_{i=0}^{2}\langle q_i, p_4\rangle q_i \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{-1}^{1}\frac{x^4}{\sqrt{2}}dx + \sqrt{\tfrac{3}{2}}x\int_{-1}^{1}\sqrt{\tfrac{3}{2}}x^5dx + \sqrt{\tfrac{5}{8}}(3x^2-1)\int_{-1}^{1}\sqrt{\tfrac{5}{8}}(3x^2-1)x^4dx \\
&= \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{2}{5} + 0 + \tfrac{5}{8}(3x^2-1)(3\cdot\tfrac{2}{7}-\tfrac{2}{5}) \\
&= \tfrac{6}{7}x^2 - \tfrac{3}{35}.
\end{aligned}$$

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Sei V der Vektorraum der komplexen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, bei denen nur endlich viele a_n von Null verschieden sind. Wir definieren ein Skalarprodukt auf V durch

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\rangle := \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\overline{b_n}.$$

(a) Zeigen Sie, dass V mit $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ein unitärer Vektorraum ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Teilmenge

$$U = \left\{ (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in V \;\middle|\; \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = 0 \right\}$$

von V ein echter (das heißt $U \neq V$) linearer Teilraum ist.

(c) Bestimmen Sie den Orthogonalraum $U^\perp$.
Hinweis: Können Sie ein paar „einfache" Vektoren in U finden?

Lösung:

(a) Axiome nachrechnen.

(b) Die Axiome eines linearen Teilraums lassen sich leicht nachrechnen. Der Teilraum ist echt, weil z. B. $(1,0,0,\ldots)$ nicht in U liegt.

(c) Sei $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in U^\perp$. Die Vektoren $a^{(n)}$ mit

$$\begin{aligned}
a^{(1)} &= (1,-1,0,0,0,\ldots), \\
a^{(2)} &= (0,1,-1,0,0,\ldots), \\
a^{(3)} &= (0,0,1,-1,0,\ldots), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

liegen alle in U. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ folgt aus $\langle b, a^{(n)}\rangle = 0$ dann $b_n = b_{n+1}$. Die Folge $b = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ muss somit konstant sein. Die einzige konstante Folge in V ist jedoch die konstante Nullfolge. D. h. es gilt $U^\perp = \{0\}$.