Lineare Algebra II
4. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
12./13. November

Gruppenübung

Aufgabe G1
Nehmen Sie zu folgendem „Beweis" des Satzes von Cayley-Hamilton Stellung:

$$p_A(A) = \det(A - A \cdot E) = \det(A - A) = \det(0) = 0.$$

Lösung: Der Beweis ist falsch.

In der Darstellung $p_A(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E)$ handelt es sich bei der Multiplikation $\lambda \cdot E$ um eine Skalarmultiplikation, d. h. eine Multiplikation der Matrix E mit dem Skalar λ, nicht um eine Multiplikation zweier Matrizen.

Aufgabe G2
Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine $n \times n$-Matrix mit

$$-A^4 = 2A^2 + E \qquad (*)$$

(a) Zeigen Sie, dass n gerade sein muss.

(b) Man bestimme für gerades n eine Matrix A, welche $(*)$ erfüllt.

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung gilt

$$A^4 + 2A^2 + E = 0.$$

Somit teilt das Minimalpolynom m_A das Polynom $t^4 + 2t^2 + 1 = (t^2 + 1)^2$. Folglich hat m_A keine Nullstelle in $\mathbb{R}$, da $(t^2 + 1)^2$ keine reelle Nullstelle hat.

Falls n ungerade wäre, hätte $P_A(t) \in \mathbb{R}[t]$ ungeraden Grad und somit (nach dem Zwischenwertsatz) eine Nullstelle in $\mathbb{R}$. Dies ist ein Widerspruch, da jede Nullstelle von P_A auch Nullstelle von m_A ist. Somit muss n gerade sein.

(b) Die Matrix $A = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ erfüllt $A^2 = -E$ und somit auch $(*)$. Für $n = 2k$ $(k \geq 2)$ betrachte

$$\begin{pmatrix} A & & & \\ & A & & \\ & & \ddots & \\ & & & A \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G3
Sei $\mathbb{K}$ ein Körper.

(a) Sei $X \in M_{n+m}(\mathbb{K})$ eine obere Block-Dreiecksmatrix

$$X = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline 0 & D \end{array}\right)$$

mit Untermatrizen $A \in M_m(\mathbb{K}), B \in M_{m,n}(\mathbb{K})$ und $D \in M_n(\mathbb{K})$. Zeigen Sie, dass für die jeweiligen charakteristischen Polynome P_X, P_A und P_B gilt:

$$P_X = P_A \cdot P_D.$$

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{K}$. Bestimmen Sie für die folgenden Matrizen jeweils das charakteristische Polynom und das Minimalpolynom:

$$A_1 = \begin{pmatrix} \lambda & & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & \\ & & \lambda \end{pmatrix}, \qquad A_3 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \\ & \lambda & 1 \\ & & \lambda \end{pmatrix}.$$

(c) Gilt die Aussage aus (a) auch für Minimalpolynome?

Lösung:

(a) Die Aussage folgt direkt aus der entsprechenden Regel für Determinanten von Blockmatrizen.

(b) In allen drei Fällen ist das charakteristische Polynom gegeben durch $P(t) = (\lambda - t)^3$. Als Minimalpolynom kommen somit nur $(t-\lambda), (t-\lambda)^2, (t-\lambda)^3$ in Frage. Man rechnet nach, dass $m_{A_1}(t) = (t-\lambda)$, $m_{A_2}(t) = (t-\lambda)^2$ und $m_{A_3} = (t-\lambda)^3$.

(c) Die Aussage $m_X = m_A \cdot m_D$ ist im Allgemeinen nicht wahr; betrachte z. B. die Einheitsmatrix $E \in M_n(\mathbb{R})$ für $n \geq 2$.

Aufgabe G4

(a) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen die gleiche Determinante, die gleiche Spur und das gleiche charakteristische Polynom haben.

(b) Zeigen Sie, dass ähnliche Matrizen das gleiche Minimalpolynom haben.

(c) Finden Sie jeweils zwei (3×3)-Matrizen mit
   (i) gleicher Determinante,
   (ii) gleicher Spur,
   (iii) gleichem charakteristischem Polynom,
   (iv) gleichem Minimalpolynom,

   die nicht ähnlich sind.

Lösung:

(a) Seien $A \in M_n(\mathbb{R})$ und $S \in GL_n(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$\det(S^{-1}AS) = \det(S)^{-1}\det(A)\det(S) = \det(A),$$

$$\operatorname{Tr}(S^{-1}AS) = \operatorname{Tr}(S^{-1}SA) = \operatorname{Tr}(A),$$

$$P_{S^{-1}AS}(t) = \det(S^{-1}AS - tE) = \det(S^{-1}AS - tS^{-1}S) = \det(S)^{-1}\det(A - tE)\det(S) = \det(A - tE) = P_A(t).$$

(b) Für jedes Polynom $P \in \mathbb{K}[t]$ mit $P(A) = 0$ gilt $P(S^{-1}AS) = S^{-1}P(A)S = 0$. Das Minimalpolynom von $S^{-1}AS$ ist somit ein Teiler des Minimalpolynoms von A. Analog ist auch das Minimalpolynom von A ein Teiler des Minimalpolynoms von $S^{-1}AS$. Somit haben A und $S^{-1}AS$ das gleiche Minimalpolynom.

(c) Betrachte z. B. die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

X	$\det X$	$\operatorname{Tr} X$	$P_X(t)$	$M_X(t)$
A	0	1	$t^2(1-t)$	$t(t-1) = t^2 - t$
B	0	1	$t^2(1-t)$	$t^2(t-1) = t^3 - t^2$
C	0	2	$-t(1-t)^2$	$t(t-1) = t^2 - t$

Nach (a) und (b) sind diese Matrizen paarweise nicht ähnlich. (A und B haben verschiedene Minimalpolynome, A und C bzw. B und C haben verschiedene Spur.)

Trotzdem haben alle die gleiche Determinante, A und B die gleiche Spur und das gleiche charakteristische Polynom, sowie A und C das gleiche Minimalpolynom.

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Bestimmen Sie das Minimalpolynom der folgenden Matrizen mit komplexen Einträgen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom $P_A(t) = t^2 - t + 6$ hat keine reelle Nullstelle, also zwei verschiedene komplexe Nullstellen. Somit ist das Minimalpolynom gleich dem charakteristischen Polynom.

Das charakteristische Polynom von B ist $P_B(t) = (t-2)^3(t-3)$. Das Minimalpolynom muss also eines der drei Polynome $(t-2)(t-3), (t-2)^2(t-3)$ und $(t-2)^3(t-3)$ sein. Man rechnet nach, dass $(B-2E)(B-3E) \neq 0$, aber $(B-2E)^2(B-3E) = 0$. Somit ist $M_B(t) = (t-2)^2(t-3)$ das Minimalpolynom von B.

Aufgabe H2 (5+5 Punkte)
Seien $\mathbb{K}$ ein Körper und $A \in M_2(\mathbb{K})$ eine 2×2-Matrix über $\mathbb{K}$, deren charakteristisches Polynom $P_A \in \mathbb{K}[t]$ keine Nullstelle über $\mathbb{K}$ hat.

(a) Schreiben Sie das charakteristische Polynom von A als Funktion der Spur und der Determinante von A.

(b) Man betrachte den Vektorraum $L := \mathrm{Span}\{E, A, A^2, \ldots\} \subset M_2(\mathbb{K})$. Wie groß ist die Dimension dieses Vektorraums?
Hinweis: Zeigen Sie, dass alle Potenzen von A als Linearkombination von A und E dargestellt werden können.

(c) Zeigen Sie, dass $L = \mathrm{Span}\{E, A\}$ unter Matrixmultiplikation abgeschlossen ist.

(d) Zeigen Sie, dass alle $B \in L \setminus \{0\}$ invertierbar sind und $B^{-1} \in L$ gilt.

(e) Schließen Sie, dass L mit der üblichen Matrixmultiplikation ein Körper ist.

(f) Mit der Identifikation $\mathbb{K} \ni a \mapsto aE \in L$ wird $\mathbb{K}$ als Teilmenge von L aufgefasst. Analog wird $\mathbb{K}[t]$ eine Teilmenge von $L[t]$. Zeigen Sie, dass P_A in $L[t]$ in Linearfaktoren zerfällt.

(g) Begründen Sie, welchen Körper man für $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält und bestimmen Sie die Nullstellen von P_A über L.

(h) Konstruieren Sie einen Körper mit vier Elementen.

Lösung:

(a) Setze $s = \mathrm{Tr} A$ und $d = \det A$. Es gilt $P_A(t) = t^2 - st + d$.

(b) Mit dem Satz von Cayley-Hamilton folgt $A^2 = sA - dE$. Per Induktion kann man also alle Potenzen von A als Linearkombination von A und E darstellen. Somit gilt $L = \mathrm{Span}\{E, A\}$ und $\dim L = 2$. (Da P_A keine Nullstelle hat, sind A und E linear unabhängig.)

(c) Seien $(\lambda_1 A + \lambda_2 E), (\mu_1 A + \mu_2 E) \in L$ mit $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{K}$ beliebig. Dann gilt

$$(\lambda_1 A + \lambda_2 E)(\mu_1 A + \mu_2 E) = \lambda_1 \mu_1 A^2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) A + \lambda_2 \mu_2 E \in L.$$

Die Matrixmultiplikation ist somit eine Abbildung von $L \times L$ nach L.

(d) Für $\mu \in \mathbb{K}$ gilt

$$(A + \mu E)(A - (s+\mu)E) = A^2 - sA - \mu(s+\mu)E = -dE - \mu(s+\mu)E = -\underbrace{P_A(-\mu)}_{\neq 0} E$$

und somit

$$(A + \mu E)^{-1} = -\frac{1}{P_A(-\mu)}(A - (s+\mu)E) \in L.$$

Sei also $x = \lambda A + \mu E \in L \setminus \{0\}$. Falls $\lambda = 0$, gilt $x^{-1} = \mu^{-1} E \in L$. Falls $\lambda \neq 0$, gilt $x^{-1} = \lambda^{-1}(A + \lambda^{-1}\mu E)^{-1} \in L$.

(e) Axiome überprüfen (folgt alles aus den vorigen Teilaufgaben).

(f) Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $P_A(A) = 0$; also ist $A \in L$ eine Nullstelle von P_A. Mit Polynomdivision erhält man $P_A(t) = (x - A) \cdot q(t)$ mit $q \in L[t]$ und $\deg q = 1$.

(g) Es gilt

$$L = \{aE + bA \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Das heißt L ist isomorph zu $\mathbb{C}$ via $a + ib \mapsto aE + bA$. Die Nullstellen von $P_A(t) = x^2 + 1$ in L sind A und $-A$.

(h) Betrachte $\mathbb{K} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ und $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. Dann ist $P_A(t) = t^2 + t + 1$ und hat keine Nullstelle in $\mathbb{K}$. Der Vektorraum $L = \mathrm{Span}\{A, E\}$ hat Dimension 2 über $\mathbb{K}$ und somit vier Elemente.

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ heißt nilpotent, falls es eine Zahl $k \in \mathbb{N}$ gibt mit $A^k = 0$. Zeigen Sie:

(a) Für eine nilpotente $(n \times n)$-Matrix $A \in M_n(\mathbb{K})$ gilt $A^n = 0$.

(b) Eine komplexe Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$ ist genau dann nilpotent, wenn sie außer Null keine weiteren Eigenwerte besitzt.

(c) Jede komplexe nilpotente Matrix ist zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix (d. h. eine obere Dreiecksmatrix mit Nullen auf der Diagonalen) ähnlich.

Lösung:

(a) Wegen $A^k = 0$ ist das Minimalpolynom von A ein Teiler von t^k, also von der Form $M_A(t) = t^d$ für ein $d \leq k$. Außerdem ist das Minimalpolynom ein Teiler des charakteristischen Polynoms; insbesondere hat es höchstens Grad n. Somit gilt $A^d = 0$ für ein $d \leq n$ und damit auch $A^n = 0$.

(b) Ist A nilpotent mit $A^k = 0$, so ist Null ihr einziger Eigenwert, denn für $\lambda \in \mathbb{C}$ folgt aus $Ax = \lambda x$ auch $\lambda^k x = A^k x = 0$ und somit $\lambda = 0$.

Besitzt umgekehrt A nur Null als Eigenwert, so ist das charakteristische Polynom von A gegeben durch $P_A(t) = (-1)^n t^n$. Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt dann $A^n = 0$.

(c) Sei A eine nilpotente Matrix. Dann ist A insbesondere nicht invertierbar. Es gibt also einen Vektor $v_1 \in \mathbb{K}^n$ mit $Av_1 = 0$. Wir ergänzen v_1 zu einer Basis mit Transformationsmatrix S_1. Bezüglich dieser Basis hat A die Gestalt

$$S_1^{-1} A S_1 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_2 \\ \hline 0 & A_2 \end{array} \right)$$

mit einer $(1 \times (n-1))$-Matrix B_2 und einer $((n-1) \times (n-1))$-Matrix A_2. Weil A nilpotent ist, muss auch $S_1^{-1} A S_1$ und somit auch A_2 nilpotent sein. Analog zur vorherigen Argumentation gibt es also eine invertierbare Matrix $S_2 \in M_{n-1}(\mathbb{R})$ mit

$$S_2^{-1} A S_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & B_3 \\ \hline 0 & A_3 \end{array} \right)$$

mit einer $(1 \times (n-2))$-Matrix B_3 und einer $((n-2) \times (n-2))$-Matrix A_3. Damit ergibt sich dann wie beim Triagonalisierungverfahren komplexer Matrizen, dass eine nilpontente Matrix zu einer strikten oberen Dreiecksmatrix ähnlich ist.