Lineare Algebra II
3. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
5./6. November

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Sei $p(t) = \sum_k a_k t^k$ ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten $a_k \in \mathbb{Z}$. Zeigen Sie: Besitzt p eine ganzzahlige Nullstelle $\lambda \in \mathbb{Z}$, so ist λ ein Teiler von a_0, d. h. es gibt eine Zahl $q \in \mathbb{Z}$ mit $a_0 = \lambda q$.

(b) Bestimmen Sie für das folgende Polynom alle Nullstellen und ihre Vielfachheiten:

$$p(t) = t^5 + t^4 - 2t^3 - 2t^2 + t + 1$$

Hinweis: Das Polynom besitzt nur ganzzahlige Nullstellen.

Lösung:

(a) Bei Polynomdivision durch $(t - \lambda)$ entsteht wieder ein Polynom q mit ganzzahligen Koeffizienten, d. h. $p(t) = (t - \lambda)q(t)$ mit $q(t) = \sum_k b_k t^k$ und $b_k \in \mathbb{Z}$. Für das Absolutglied von p gilt somit $a_0 = -\lambda b_0$.

(b) Es gilt $p(t) = (t-1)^2(t+1)^3$.

Aufgabe G2

Wir bezeichnen mit $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ die Menge der unendlich oft differenzierbaren Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(a) Machen Sie sich klar, dass $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ein reeller Vektorraum ist und dass die Ableitung $D : \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) \to \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}) : f \mapsto f'$ eine lineare Abbildung ist.

(b) Zeigen Sie, dass jede reelle Zahl λ ein Eigenwert von D ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Exponentialfunktion.

(c) Machen Sie sich klar, dass die Menge aller Polynomfunktionen $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein linearer Teilraum von $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R})$ ist. Zeigen Sie, $D(\mathscr{P}(\mathbb{R})) \subseteq \mathscr{P}(\mathbb{R})$, d. h. die Abbildung D lässt sich auf den Teilraum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ einschränken.
Finden Sie alle Eigenwerte und Eigenvektoren der eingeschränkten Abbildung $D|_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R}) : p \mapsto p'$.

Lösung:

(b) Für die Funktion $f_\lambda(x) = e^{\lambda x}$ gilt $D(f)(x) = f'(x) = \lambda e^{\lambda x} = \lambda f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. f ist ein Eigenvektor von D zum Eigenwert λ.

(c) Die Ableitung einer konstanten Funktion verschwindet, d. h. D hat auf $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ den Eigenwert 0. Die Ableitung eines Polynoms von Grad $k > 0$ ist ein Polynom vom Grad $k-1$. Die Gleichung $D(p) = p' = \lambda p$ hat somit für kein $\lambda \neq 0$ eine Lösung, d. h. es gibt keine weiteren Eigenwerte.

Aufgabe G3

Wir definieren rekursiv eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ natürlicher Zahlen durch

$$f_1 := 1\,, \quad f_2 := 1\,, \quad f_{n+2} := f_n + f_{n+1} \quad \text{für } n \geq 3.$$

Die so konstruierten Zahlen f_n heißen *Fibonacci-Zahlen.*

(a) Berechnen Sie die ersten acht Fibonacci-Zahlen.

(b) Um eine Darstellung zu finden, mit der man ohne Rekursion direkt das n-te Folgeglied angeben kann, verwenden wir das Konzept der Eigenwerte einer Matrix.
Für jedes $n \in \mathbb{N}$ setzen wir $x_n := (f_n, f_{n+1})^T \in \mathbb{R}^2$. Finden Sie eine (2×2)-Matrix A mit

$$x_{n+1} = Ax_n.$$

Mit vollständiger Induktion folgt dann $x_n = A^{n-1}x_1$. Insbesondere ist die Fibonacci-Zahl f_n der erste Eintrag des Vektors $A^{n-1}x_1$.

(c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenräume der Matrix A.

(d) Bestimmen Sie eine explizite Formel für die n-te Fibonacci-Zahl, indem Sie die Potenzen A^n bestimmen.

Lösung:

(a) Es gilt

$$f_1 = 1,\ f_2 = 1,\ f_3 = 2,\ f_4 = 3,\ f_5 = 5,\ f_6 = 8,\ f_7 = 13 \text{ und } f_8 = 21\,.$$

(b) Es muss gelten

$$A\begin{pmatrix} f_n \\ f_{n+1} \end{pmatrix} = Ax_n = x_{n+1} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{n+1} \\ f_n + f_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Dies ist offensichtlich für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erfüllt.

(c) Die Matrix hat die Eigenwerte $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ mit den Eigenvektoren $x_1 = (1, \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}))^T$ und $x_2 = (1, \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}))^T$.

(d) Mit der Transformationsmatrix $S = (x_1|x_2)$ gilt

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix}.$$

Es folgt

$$\begin{aligned}
A^n &= S(S^{-1}AS)^n S^{-1} = S \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n \end{pmatrix} S^{-1} \\
&= \frac{1}{\det S} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & -1 \\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}
A^{n-1}x_1 &= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) & -1 \\ -\frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n-1} & 0 \\ 0 & \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1-\sqrt{5}) \\ -\frac{1}{2}(-1+\sqrt{5}) \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) & \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n \end{pmatrix} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^n - \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^n \\ \left(\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})\right)^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Da die n-te Fibonacci-Zahl der erste Eintrag von $A^{n-1}x_1$ ist, folgt

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right).$$

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)

(a) Sei V ein Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass ϕ^2 den Eigenwert 1 hat. Sei $v \in V$ ein zugehöriger Eigenvektor von ϕ^2, der kein Eigenvektor von ϕ ist. Zeigen Sie, dass ϕ die Eigenwerte 1 und -1 hat.

(b) Sei V ein Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus, so dass -1 ein Eigenwert von $\phi^2 + \phi$ ist. Zeigen Sie, dass ϕ^3 den Eigenwert 1 hat.

Lösung:

(a) Betrachte $w_+ = v + \phi(v)$ und $w_- = v - \phi(v)$. Da v kein Eigenvektor von ϕ ist, sind w_+ und w_- von Null verschieden. Es gilt

$$\phi(w_+) = \phi(v) + \phi^2(v) = \phi(v) + v = w_+, \qquad \phi(w_-) = \phi(v) - \phi^2(v) = \phi(v) - v = w_-,$$

also sind w_+ und w_- Eigenvektoren zu den Eigenwerten 1 und -1.

(b) Sei $v \neq 0$ ein Eigenvektor von $\phi^2 + \phi$ zum Eigenwert -1, d. h. $\phi(v) + \phi^2(v) = -v$. Es folgt

$$0 = \phi(\underbrace{v + \phi(v) + \phi^2(v)}_{=0}) = \underbrace{\phi(v) + \phi^2(v)}_{=-v} + \phi^3(v).$$

Also ist v Eigenvektor von ϕ^3 zum Eigenwert 1.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Betrachten Sie die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie jeweils das charakteristische Polynom und die komplexen Eigenwerte mit zugehörigen algebraischen und geometrischen Vielfachheiten.

(b) Welche der Matrizen können Sie über $\mathbb{R}$ diagonalisieren, welche über $\mathbb{C}$?

Lösung: Das charakteristische Polynom von A lautet $p(\lambda) = (1-\lambda)(4-\lambda)(6-\lambda)$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 6$, jeweils mit algebraischer (und somit auch geometrischer) Vielfachheit 1. Die Matrix ist also sowohl über $\mathbb{R}$ als auch über $\mathbb{C}$ diagonalisierbar.

Das charakteristische Polynom von B ist $p(\lambda) = (1-\lambda)^2(2-\lambda)$. Die Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 1$ mit algebraischer Vielfachheit 2 und $\lambda_2 = 2$ mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1. Man sieht leicht, dass $B - \lambda_1 E$ Rang 2 hat und somit 1-dimensionalen Kern. Der Eigenwert λ_1 hat also geometrische Vielfachheit 1. Die Matrix ist folglich weder über $\mathbb{C}$ noch über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar.

Das charakteristische Polynom von C ist $p(\lambda) = -\lambda(\lambda^2 + 9) = -\lambda(\lambda - 3i)(\lambda + 3i)$. Die komplexen Eigenwerte sind also $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 3i, \lambda_3 = -3i$, jeweils mit algebraischer und geometrischer Vielfachheit 1. Über $\mathbb{C}$ ist die Matrix folglich diagonalisierbar, über $\mathbb{R}$ nicht.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Sei $\mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum aller Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Sei $0 \neq x_0 \in \mathbb{R}$ fest. Betrachten Sie den linearen Endomorphismus $S : \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, der gegeben ist durch

$$(Sf)(x) = f(x + x_0).$$

(a) Machen Sie sich klar, dass sich S auf den linearen Teilraum $\mathscr{P}(\mathbb{R})$ aller Polynomfunktionen einschränken lässt (ohne Beweis). Zeigen Sie, dass die konstanten Funktionen die einzigen Eigenvektoren der eingeschränkten Abbildung $S|_{\mathscr{P}(\mathbb{R})} : \mathscr{P}(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}(\mathbb{R})$ sind.

(b) Zeigen Sie, dass jede positive, reelle Zahl $\lambda > 0$ ein Eigenwert von S ist.

Lösung:

(a) Sei $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein Eigenvektor von S zum Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$, d. h. $Sp = \lambda p$. Sei n der Grad von p, d. h. $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ mit $a_n \neq 0$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lambda \sum_{k=0}^{n} a_k x^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (x + x_0)^k.$$

Vergleicht man die höchsten Koeffizienten beider Seiten, so erhält man $\lambda a_n = a_n$, also $\lambda = 1$. Es gibt also höchstens den Eigenwert 1.

Wir müssen noch zeigen, dass die konstanten Funktionen die einzigen Eigenvektoren zum Eigenwert 1 sind. Sei also $p \in \mathscr{P}(\mathbb{R})$ ein Polynom mit Grad höchstens n, sodass $Sp = p$.

Mit vollständiger Induktion zeigt man leicht, dass $p(k \cdot x_0) = p(0)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, insbesondere also $p(0) = p(x_0) = \ldots = p(n \cdot x_0)$, d. h. p nimmt an $n+1$ Stellen den gleichen Wert an. Da ein Polynom von Grad höchstens n durch seine Werte an $n+1$ Stellen eindeutig bestimmt ist, muss p die konstante Funktion $p = p(0)$ sein.

(b) Sei $\lambda > 0$. Betrachte $f(x) = \exp(\frac{x}{x_0} \ln \lambda) = \lambda^{\frac{x}{x_0}}$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$(Sf)(x) = f(x + x_0) = \lambda^{\frac{x+x_0}{x_0}} = \lambda^{1+\frac{x}{x_0}} = \lambda \cdot \lambda^{\frac{x}{x_0}} = \lambda f(x),$$

d. h. f ist ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.