Lineare Algebra II
2. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
29./30. Oktober 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -3 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist $\det(A - \lambda E) = \lambda^2 - \lambda - 1$. Die Eigenwerte sind somit $\lambda_1 = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$. Durch Berechnen des Kerns von $A - \lambda_i E$ erhält man als Eigenvektoren

$$x_1 = (1, -\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}))^T, \qquad x_2 = (\tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5}), 1)^T.$$

Das charakteristische Polynom von B ist $\det(B - \lambda E) = -\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda + 1 = -(\lambda-1)(\lambda+1)^2$. Die Eigenwert sind somit $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Durch Berechnen des Kerns von $A - \lambda_i E$ erhält man für $\lambda_1 = 1$ den Eigenvektor $x_1 = (1,3,2)^T$ und für $\lambda_2 = -1$ die Eigenvektoren $x_2 = (1,0,1)^T$ und $x_3 = (-1,1,0)^T$.

Bei C sieht man den Eigenvektor $x_0 = (1,1,\dots,1)^T$ zum Eigenwert $\lambda_0 = n$ sofort. Weiter hat die Matrix Rang 1 und somit $(n-1)$-dimensionalen Kern. Zum Eigenwert $\lambda_1 = 0$ gibt es also $n-1$ linear unabhängige Eigenvektoren, z. B. die Vektoren

$$x_1 = (1,-1,0,\dots)^T, \quad x_2 = (0,1,-1,0,\dots)^T, \quad \dots, \quad x_{n-1} = (0,\dots,0,1,-1)^T.$$

Aufgabe G2

(a) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A auch ein Eigenwert der transponierten Matrix A^T ist. Zeigen Sie, dass die zugehörigen Eigenräume im Allgemeinen nicht übereinstimmen.

(b) Sei A eine $(n \times n)$-Matrix mit komplexen Einträgen. Wie hängen die Eigenwerte und Eigenvektoren von A mit den Eigenwerten und Eigenvektoren der komplex konjugierten Matrix $\bar{A}$ zusammen?

Lösung:

(a) Wegen $\det(A - \lambda E) = \det(A^T - \lambda E) = \det((A-\lambda E)^T)$, haben A und A^T dasselbe charakteristische Polynom und somit dieselben Eigenwerte. Um zu sehen, dass die Eigenräume im Allgemeinen nicht überein stimmen, betrachte $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right)$. Dann haben A und A^T die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Die Matrix A hat die Eigenvektoren

$$(1,0)^T, \quad (1,1)^T,$$

A^T hat die Eigenvektoren

$$(0,1)^T, \quad (1,-1)^T.$$

(b) Es gilt $Av = \lambda v$ genau dann, wenn $\bar{A}\bar{v} = \bar{\lambda}\bar{v}$. Somit sind die Eigenwerte und Eigenvektoren von $\bar{A}$ gerade die komplex Konjugierten der Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

Aufgabe G3
Betrachten Sie die lineare Abbildung $\phi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$\phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \begin{pmatrix} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis $\mathscr{B}$ von $\mathbb{R}^4$ und $\mathscr{C}$ von $\mathbb{R}^3$, so dass die Matrix von ϕ die folgende Gestalt hat:

$$[\phi]^{\mathscr{B}}_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lösung: Die Matrix A von ϕ bezüglich der Standardbasis lautet

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Der Kern von A wird z. B. von den Vektoren $b_3 = (11, -8, 1, 0)^T$ und $b_4 = (9, -7, 0, 1)^T$ aufgespannt. Wir ergänzen b_3 und b_4 durch $b_1 = (1, 0, 0, 0)^T$ und $b_2 = (0, 1, 0, 0)^T$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Das Bild von ϕ wir von $c_1 = \phi(b_1) = (2, 3, 1)^T$ und $c_2 = \phi(b_2) = (3, 4, 1)^T$ aufgespannt. Wir ergänzen c_1 und c_2 durch $c_3 = (0, 0, 1)^T$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

Bezüglich der Basen $\mathscr{B} = (b_1, b_2, b_3, b_4)$ und $\mathscr{C} = (c_1, c_2, c_3)$ hat ϕ die gewünschte Gestalt.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Sei $\mathbb{K} = \{0, 1\}$ der Körper mit zwei Elementen. Bestimmen Sie alle (2×2)-Matrizen über $\mathbb{K}$, die keine Eigenwerte haben.

Lösung: In $M_2(\mathbb{K})$ gibt es insgesamt $2^4 = 16$ Matrizen. Die gesuchten Matrizen sind invertierbar, da sie sonst den Eigenwert 0 hätten. Die invertierbaren Matrizen sind

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Davon haben nur

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

keine Eigenwerte.

Die ersten vier haben (über $\mathbb{K}$) das charakteristische Polynom $(\lambda - 1)^2 = \lambda^2 - 1$. (Das hat $\lambda = 1$ als doppelte Nullstelle.)

Die letzten beiden haben das charakteristische Polynom $-\lambda(1 - \lambda) - 1 = \lambda^2 - \lambda - 1$, was keine Nullstelle besitzt.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad A^{-1}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B^T.$$

Lösung: Das charakteristische Polynom von A ist $\det(A - \lambda E) = -(\lambda - 2)^2(\lambda + 2)$. Also hat A die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2$. Durch Berechnen des Kerns von $A - \lambda E$ erhält man zu $\lambda_1 = 2$ den Eigenvektor $x_1 = (1, 0, -2)^T$ und zu $\lambda_2 = -2$ den Eigenvektor $(-3, 4, 2)^T$.

A^{-1} hat die Eigenwerte $\frac{1}{\lambda_1} = \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{\lambda_2} = -\frac{1}{2}$ mit den Eigenvektoren x_1 und x_2.

$B = A + 3E$ hat die Eigenwerte $\lambda_1 + 3 = 5, \lambda_2 + 3 = 1$ mit den Eigenvektoren x_1 und x_2.

B^T hat die gleichen Eigenwerte wie B. Durch Berechnen des Kerns von $B^T - \lambda E$ erhält man die Eigenvektoren $y_1 = (2, 1, 1)^T$ und $y_2 = (2, -3, 1)^T$.

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Sei $A \in M_n(\mathbb{K})$ eine Matrix und λ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass die geometrische Vielfachheit von λ kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit von λ ist.

Lösung: Bezeichne mit k die geometrische Vielfachheit von λ. Dann gibt es linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{K}^n$ mit $Av_i = \lambda v_i$ für alle $i = 1, \dots, k$. Wir ergänzen diese Vektoren zu einer Basis $v_1, \dots, v_n$ von $\mathbb{K}^n$. Bezeichne mit $S := (v_1 | \dots | v_n) \in M_n(\mathbb{K})$ die entsprechende Transformationsmatrix. Dann hat die Matrix $S^{-1}AS$ die Gestalt

$$S^{-1}AS = \left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & & & \\ & \ddots & & A_1 \\ & & \lambda & \\ \hline & 0 & & A_2 \end{array}\right)$$

mit einer $k \times (n-k)$-Matrix A_1 und einer $(n-k) \times (n-k)$-Matrix A_2. Für das charakteristische Polynom gilt dann

$$\det(A - tE) = \det(S^{-1}(A - tE)S) = \det(S^{-1}AS - tE) = (\lambda - t)^k \cdot \det(A_2 - tE) \,.$$

Somit hat λ mindestens die algebraische Vielfachheit k.