Lineare Algebra II
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
11./12. Februar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Sei

$$J_\lambda := \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & \\ & \lambda & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & \lambda & 1 \\ & & & & \lambda \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n\times n}$$

ein Jordanblock zum Eigenwert λ. Für eine beliebige Matrix A definieren wir

$$e^A := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\,.$$

(a) Berechnen Sie J_0^k.

(b) Berechnen Sie J_λ^k.
Hinweis: Benutzen Sie die Zerlegung $J_\lambda = \lambda E_n + J_0$.

(c) Seien A und B Matrizen mit $AB = BA$. Zeigen Sie, dass $e^{A+B} = e^A e^B$.
(Wir ignorieren hierbei alle Konvergenzprobleme. In diesem Fall konvergiert tatsächlich alles, was konvergieren soll, aber das geht über die Inhalte der linearen Algebra hinaus.)

(d) Zeigen Sie, dass $e^{S^{-1}AS} = S^{-1}e^A S$ für eine beliebige Matrix A und eine invertierbare Matrix S.

(e) Beweisen Sie, dass

$$e^{J_\lambda} = e^\lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{J_0^i}{i!}\,.$$

Lösung:

(a)

$$J_0^k = \begin{array}{l} \overbrace{\hphantom{0 \quad \cdots \quad 0}}^{k} \\ \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & & & & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

(b)

$$J_\lambda^k = (\lambda E_n + J_0)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \lambda^i J_0^{k-i}.$$

(c)

$$e^{A+B} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \frac{A^i B^{k-i}}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{k} \frac{A^i B^{k-i}}{i!\,(k-i)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{B^i}{i!} = e^A e^B.$$

(d) Es gilt $(S^{-1}AS)^k = S^{-1}ASS^{-1}AS \cdots S^{-1}AS = S^{-1}AA \cdots AS = S^{-1}A^kS$. Damit folgt

$$e^{S^{-1}AS} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(S^{-1}AS)^i}{i!} = S^{-1}\Big[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\Big] S = S^{-1} e^A S\,.$$

(e)

$$e^{J_\lambda} = e^{\lambda E_n + J_0} = e^{\lambda E_n} e^{J_0} = e^\lambda \sum_{i=0}^{\infty} \frac{J_0^i}{i!} = e^\lambda \sum_{i=0}^{n-1} \frac{J_0^i}{i!}\,.$$

Aufgabe G2

Sei $A \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ wobei $n = 2m$ gerade ist. Das charakteristische Polynom von A sei $p_A = p_0^m$, wobei $p_0 \in \mathbb{R}[x]$ ein irreduzibles Polynom vom Grad 2 in $\mathbb{R}[x]$ ist (z. B. $p_0 = x^2 + 1$). Also lässt sich p_0 in $\mathbb{C}[x]$ in zwei Linearfaktoren $(\lambda - x)(\overline{\lambda} - x)$ mit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ zerlegen.

(a) Zeigen Sie: Ist v ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert λ von Höhe k, dann ist $\overline{v}$ ein verallgemeinerter Eigenvektor zum Eigenwert $\overline{\lambda}$ von Höhe k und $[v] \cap [\overline{v}] = 0$.
(*Hinweis.* Folgendes Lemma dürfen Sie ohne Beweis benutzen: Seien $q_1, \dots, q_m \in \mathbb{F}[x]$ teilerfremd. Ist $q = \prod_{i=1}^m q_i$, so gilt $\ker(q(\varphi)) = \bigoplus_{i=1}^m \ker(q_i(\varphi))$.)

(b) Zeigen Sie, dass A ähnlich zu einer reellen Matrix $K \in \mathbb{R}^{(n,n)}$ ist, die aus nur drei Arten von (2×2)-Blöcken besteht: $0 \in \mathbb{R}^{(2,2)}$, $E_2 \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ und $A_0 = \left(\begin{smallmatrix} a & -b \\ b & a \end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{(2,2)}$ mit $b \neq 0$, wobei A_0 auf der Diagonalen auftritt, E_n und 0 direkt über der Diagonalen und 0 sonst (eine „Block-Jordannormalform“).

(c) Geben Sie Beispiele $A_k \in \mathbb{R}^{(6,6)}$ mit charakteristischem Polynom $(x^2+1)^3$ und Minimalpolynomen $q_{A_k} = (x^2+1)^k$ für $k = 1, 2, 3$ an.

Lösung:

(a) The first statement follows from the equivalence

$$(A - \lambda E)^k \mathbf{v} = \mathbf{0} \Longleftrightarrow (A - \overline{\lambda} E)^k \overline{\mathbf{v}} = \mathbf{0}\,.$$

To prove that $[\mathbf{v}] \cap [\overline{\mathbf{v}}] = 0$, observe that if $\mathbf{w} \in [\mathbf{v}] \cap [\overline{\mathbf{v}}]$, then $\mathbf{w} \in \ker(\varphi - \lambda E)^k$ and $\mathbf{w} \in \ker(\varphi - \overline{\lambda} E)^k$. As the polynomials $(X - \lambda)^k$ and $(X - \overline{\lambda})^k$ are relatively prime, this can only happen for $\mathbf{w} = \mathbf{0}$, by the Lemma given in the hint.

(b) By (a), we may assume that if $\mathbf{v}$ generates a Jordan block for eigenvalue λ, then $\overline{\mathbf{v}}$ generates a Jordan block of the same size for eigenvalue $\overline{\lambda}$. So, in fact, when

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}$$

is a certain Jordan block of the matrix associated to vectors $(\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, then also the Jordan block

$$\begin{pmatrix} \overline{\lambda} & 1 & & 0 \\ & \overline{\lambda} & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \overline{\lambda} \end{pmatrix}$$

appears, and we may assume it is associated to the vectors $(\overline{\mathbf{b}}_1,\dots,\overline{\mathbf{b}}_n)$ (proof: if the last vector for this basis is $\overline{\mathbf{b}}_n$, then the $(n-1)$th vector is $(A-\overline{\lambda})\overline{\mathbf{b}}_n = \overline{(A-\lambda)\mathbf{b}_n} = \overline{\mathbf{b}}_{n-1}$, and so on.).
We may rearrange these vectors as

$$(\mathbf{b}_1+\overline{\mathbf{b}}_1,\ i(\mathbf{b}_1-\overline{\mathbf{b}}_1),\ \dots,\mathbf{b}_n+\overline{\mathbf{b}}_n,\ i(\mathbf{b}_n-\overline{\mathbf{b}}_n)).$$

With respect to this basis of real vectors, the matrix looks as follows:

$$\left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc}
a & -b & 1 & 0 & & & & 0 \\
b & a & 0 & 1 & & & & \\
\hline
 & & a & -b & \ddots & \ddots & & \\
 & & b & a & \ddots & \ddots & & \\
\hline
 & & & & \ddots & \ddots & 1 & 0 \\
 & & & & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & & & a & -b \\
0 & & & & & & b & a
\end{array}\right),$$

where $\lambda = a+ib$. To follow this, keep in mind that for $k=1,\dots,n$

$$A(\mathbf{b}_k+\overline{\mathbf{b}}_k) = (a+ib)\mathbf{b}_k + (a-ib)\overline{\mathbf{b}}_k = a(\mathbf{b}_k+\overline{\mathbf{b}}_k) + b(i(\mathbf{b}_k-\overline{\mathbf{b}}_k))$$

and similarly

$$A(\mathbf{b}_k-\overline{\mathbf{b}}_k) = (a+ib)\mathbf{b}_k - (a-ib)\overline{\mathbf{b}}_k = -b(\mathbf{b}_k+\overline{\mathbf{b}}_k) + a(i(\mathbf{b}_k-\overline{\mathbf{b}}_k)).$$

From the structure of A with respect to the new basis the statement in the exercise follows.

(c) We have, for example:

$$A_1 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc}
0 & -1 & & & & 0 \\
1 & 0 & & & & \\
\hline
 & & 0 & -1 & & \\
 & & 1 & 0 & & \\
\hline
 & & & & 0 & -1 \\
0 & & & & 1 & 0
\end{array}\right), \qquad
A_2 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc}
0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & 0 & -1 & & \\
 & & 1 & 0 & & \\
\hline
 & & & & 0 & -1 \\
0 & & & & 1 & 0
\end{array}\right),$$

$$A_3 = \left(\begin{array}{cc|cc|cc}
0 & -1 & 1 & 0 & & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & & \\
\hline
 & & 0 & -1 & 1 & 0 \\
 & & 1 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
 & & & & 0 & -1 \\
0 & & & & 1 & 0
\end{array}\right).$$

Aufgabe G3

Wir benutzen Vektoren $s_n \in \mathbb{R}^3$ um den Zustand eines 3-dimensionalen Systems zur Zeit $n \in \mathbb{N}$ zu beschreiben (zum Beispiel die Position eines Teilchens im Raum). Die Evolution des Systems von Schritt n nach $n+1$ sei dabei gegeben durch

$$s_{n+1} = As_n \quad \text{mit} \quad A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 0 \\ 14 & -5 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) Bringen Sie A in Jordannormalform, um eine Beschreibung von s_n als Funktion von n und dem initialen Zustand s_0 zu erhalten.

(b) Berechnen Sie s_{100} für $s_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Lösung:

(a) The characteristic polynomial of A is $p_A = (1-X)^2(2-X)$, so $\lambda_1 = 1$ and $\lambda_2 = 2$ are the eigenvalues of A. The corresponding eigenspaces are 1-dimensional, with generators

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{for } V_{\lambda_1} \quad \text{and} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{for } V_{\lambda_2}.$$

Therefore the Jordan normal form of A is

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

To find a matrix S such that $A = SJS^{-1}$, we take as third column $\mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$, an eigenvector with eigenvalue 2, and as second column an element of $\ker(A - E_3)^2 \setminus \ker(A - E_3)$, for example $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. The first column will then be

$$\mathbf{u}_1 = (A - E_3)\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Hence,} \quad S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

We have $\mathbf{s}_n = A^n \mathbf{s}_0 = SJ^nS^{-1}\mathbf{s}_0$. Furthermore

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

(b) For $\mathbf{s}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, we have

$$\mathbf{s}_n = 2^n \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - n \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad \text{Hence,} \quad \mathbf{s}_{100} = 2^{100} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 100 \\ 201 \\ -99 \end{pmatrix}.$$