Lineare Algebra II
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
4./5. Februar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1

Es sei A eine 3×3-Matrix, die nur die Eigenwerte 0 und 1 besitzt.

Geben Sie alle möglichen Jordanschen Normalformen an, die zu A gehören könnten. Dabei sieht man Normalformen, die nur durch ein Vertauschen der Vektoren in der zugehörigen Jordanbasis auseinander hervorgehen als gleich an.

Lösung: Die möglichen Jordanschen Normalformen sind

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe G2

Es seien $A_1,\ A_2,\ldots,A_8 \in M_5(\mathbb{C})$ komplexe 5×5-Matrizen, die alle den Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ haben und keinen weiteren. Zeigen Sie, dass mindestens zwei der Matrizen $A_1,A_2,\ldots,A_8$ zueinander ähnlich sind.

Lösung: Bekannt ist, dass zwei Matrizen mit der gleichen Jordanschen Normalform (bis auf Permutation der Jordanblöcke) ähnlich sind.

Mit den gegebenen Bedingungen gibt es bis auf eine Permutation der Jordanblöcke nur die folgenden Möglichkeiten für die Jordansche Normalform:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Dies sind nur sieben Möglichkeiten, d.h. mindestens zwei der gegebenen acht Matrizen haben (bis auf Permutation der Jordanblöcke) dieselbe Jordansche Normalform und sind somit ähnlich zueinander.

Aufgabe G3
Betrachten Sie die folgenden komplexen quadratischen Matrizen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 0 & 0 \\ i & 0 & 2 & 0 \\ i & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 11 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & i & 7 \\ i & 1 & 9 & i \\ 0 & 0 & 3 & 39 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie jeweils die Jordansche Normalform.

Lösung:

(a) Da die Matrix untere Dreiecksgestalt hat, kann man unmittelbar ablesen, dass 1 und 2 die beiden einzigen Eigenwerte sind, die beide mit algebraischer Vielfachheit 2 vorkommen. Da $\mathsf{rank}(A-E) = 3$ und $\mathsf{rank}(A-2E) = 2$, folgt, dass die Jordansche Normalform von der Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist (bis auf die Reihenfolge der Jordankästchen).

(b) Das charakteristische Polynom $P_B(t) = (11-t)(4-t) + 6$ von B hat die Nullstellen 5 und 10. Damit ist die Matrix B diagonalisierbar und eine Jordansche Normalform ist $\mathrm{diag}(5, 10)$.

(c) Durch Entwickeln nach der zweiten Spalte erhält man sofort das Minimalpolynom $P_C(t) = (1-t)^2(3-t)(4-t)$. Aus $\mathrm{rank}(C-E) = 3$, was man an der Gestalt der Matrix sofort abliest, folgt, dass es nur ein Jordankästchen zum Eigenwert 1 gibt und eine Jordansche Normalform von C hat die Gestalt

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(d) Die Matrix D liegt bereits in Jordanscher Normalform vor.

Aufgabe G4
Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine reguläre Matrix S und eine Matrix J in Jordannormalform mit $A = SJS^{-1}$.

Hinweis: Das charakteristische Polynom von A ist $p_A = (2-x)^4$.

Lösung: 2 ist der einzige Eigenwert. Wir betrachten also die Matrix

$$C := A - 2E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Wir sehen, dass $\mathsf{dim}(\mathsf{ker}(C)) = 2$, d. h., A hat zwei linear unabhängige Eigenvektoren. Also hat J zwei Jordanblöcke, entweder beide von Größe 2 oder einer von Größe 3 und einer von Größe 1. Um zu sehen, welcher der Fälle zutrifft, betrachten wir C^2. Wegen $C^2 = \mathbf{0}$, hat J zwei Blöcke der Größe 2, also

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Um die Basistransformation S zu finden, müssen wir eine geeignete Basis bestimmen. Wir bezeichnen mit $[u]$ den verallgemeinerten Eigenraum zum Eigenwert u. Wir brauchen zwei Vektoren u_2 und u_4, so dass

$$\dim([u_2]) = \dim([u_4]) = 2 \quad \text{und} \quad [u_2] \cap [u_4] = 0\,.$$

Wir können z. B.

$$u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\,.$$

wählen. Die anderen Basisvektoren erhalten wir dann als

$$u_1 = Cu_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad u_3 = Cu_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}\,.$$

Die Basistransformationsmatrix S lautet also

$$S = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 0 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\,.$$