Lineare Algebra II
11. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
21./22. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Betrachten Sie die quadratischen Formen Q_i mit

$$Q_i(x) = x^T A_i x$$

für die Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -10 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 10 \end{pmatrix} \text{ und } A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Welche dieser quadratischen Formen sind positiv definit? Welche sind negativ definit? Zeigen Sie jeweils ihre Aussagen.

(b) Gibt es nicht invertierbare positiv definite Matrizen? Zeigen Sie Ihre Aussage.

Lösung:

(a) Wir verwenden das Kriterium über Minoren aus der Vorlesung.
Für A_1 gilt

$$\det((A_1)_1) = \det(3) = 3 > 0 \text{ und } \det((A_1)_2) = \det A_1 = 12 - 9 = 3 > 0\,.$$

D.h. A_1 ist positiv definit.
Für A_2 gilt

$$\det((A_2)_1) = \det(-1) = -1 < 0 \text{ und } \det((A_2)_2) = \det A_2 = 10 - 9 = 1 > 0\,.$$

D.h. A_2 ist negativ definit.
Die zweite Spalte von A_3 ist das doppelte der ersten Spalte, d.h. es gilt

$$\det((A_3)_3) = \det A_3 = 0\,.$$

Also ist A_3 weder positiv noch negativ definit.
Für A_4 gilt

$$\det((A_4)_1) = \det(1) = 1 > 0, \quad \det((A_4)_2) = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = 5 - 4 = 1 > 0 \text{ und } \det((A_4)_3) = \det A_4 = 1\,.$$

D.h. A_4 ist positiv definit.

(b) Eine nicht invertierbare Matrix hat Determinante Null und damit einen Eigenwert Null. Es sind also nicht alle Eigenwerte größer als Null. D.h. eine solche Matrix kann nicht positiv definit sein.

Aufgabe G2
Gilt analog zum Kriterium für positive Definitheit auch folgendes?

Eine reelle symmetrische Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ ist genau dann positiv semidefinit, wenn für alle Hauptminoren $A_r, r = 1, \dots, n$ gilt $\det A_r \geq 0$.

Lösung: Nein, denn z. B. die Hauptminoren der Matrix $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{smallmatrix}\right)$ sind größer oder gleich o, aber die Matrix ist nicht semidefinit, da sie einen negativen Eigenwert hat.

Aufgabe G3
Sei $B \in M_n(\mathbb{R})$. Zeigen Sie, dass die Matrix $A = B^T B$ symmetrisch und positiv semidefinit ist. Falls B invertierbar ist, ist A sogar positiv definit.

Lösung: A ist symmetrisch, denn $A^T = (B^T B)^T = B^T B = A$.

Um zu zeigen, dass A positiv semidefinit ist, benutzen wir das Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^n$: Für alle $x \in \mathbb{R}^n$ gilt $x^T A x = x^T B^T B x = \langle Bx, Bx \rangle \geq 0$.

Ist B invertierbar, so ist $Bx \neq 0$ für $x \neq 0$ und daher $x^T A x > 0$ für $x \neq 0$, also ist A positiv definit.

Aufgabe G4
Gegeben sei die reelle, symmetrische $n \times n$-Matrix

$$A_n = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle $a, b \in \mathbb{R}$, für die A_n positiv bzw. negativ definit ist.

Lösung: Wir betrachten zuerst den Fall $n = 1$. Die Matrix A_1 ist positiv definit für $a > 0$ und negativ definit für $a < 0$.

Nun diskutieren wir den allgemeinen Fall $n > 1$, indem wir das Hauptminorenkriterium verwenden. Dazu müssen wir jeweils $\det(A_k)$ für $k = 1, \dots, n$ berechnen.

Wir ziehen die erste Zeile von A_n von allen übrigen Zeilen ab und erhalten

$$A_n' = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b-a & a-b & 0 & \dots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ b-a & 0 & \dots & 0 & a-b \end{pmatrix}.$$

Nun addieren wir die zweite bis n-te Spalte zur ersten und erhalten

$$A_n'' = \begin{pmatrix} a+(n-1)b & b & b & \dots & b \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{pmatrix}.$$

Da diese Zeilen- und Spaltentransformationen die Determinante nicht verändern, ist $\det A_n = \det A_n'' = (a-b)^{n-1}(a+(n-1)b)$ und analog für die Hauptminoren $\det A_k = (a-b)^{k-1}(a+(k-1)b)$.

- Damit A_n positiv definit ist, müssen alle $\det A_k > 0$ sein. Für $k = 1$ gilt $\det A_1 = a$, womit $a > 0$ gelten muss. Wegen $\det A_2 = a^2 - b^2$ folgt $a > |b|$. Damit ist der Faktor $(a-b)^{k+1} > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Für $\det A_k > 0$ muss dann auch $a + (n-1)b > 0$ sein. Ist $b \geq 0$, so ist dies stets der Fall. Ist $b < 0$, so gilt $a + (k-1)b < a + (\ell+1)b$ für $k > \ell$. Ist also $a + (n-1)b > 0$, so ist auch $a + (k-1)b > 0$ für alle $k = 1, \dots, n$. Wir erhalten also:

  A_n ist genau dann positiv definit, wenn entweder $a > 0, b \geq 0, a > b$ oder $a > 0, b < 0, a > (1-n)b$ gelten.
- Damit A_n negativ definit ist, muss wegen $\det A_1 = a$ gelten $a < 0$. Aus $\det A_2 > 0$ folgt $|a| > |b|$. Damit ist $a - b < 0$ Wegen $\det A_k < 0$ für k ungerade und $\det A_k > 0$ für k gerade muss $a + (k-1)b < 0$ für alle $k = 1, \dots, n$ gelten. Für $b \leq 0$ ist das immer erfüllt. Ist $b > 0$, so muss $-a > (n-1)b$ gelten. Wir erhalten also:

  A_n ist genau dann negativ definit, wenn $a < 0, b > 0, b < \frac{a}{1-n}$ oder $a < 0, b \leq 0, a < b$ gelten.

Aufgabe H1 (5 Punkte)

(a) Welche der folgenden Matrizen sind positiv definit, positiv semidefinit, negativ definit, negativ semidefinit oder indefinit?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_4 = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_6 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Für welche Werte $a \in \mathbb{R}$ ist die Matrix $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ positiv bzw. negativ definit?

Lösung:

(a)
- A_1 hat die Eigenwerte 0 und 5 und ist demnach positiv semidefinit.
- A_2 ist nach dem Hauptminorenkriterium positiv definit.
- A_3 hat einen positiven und einen negativen Eigenwert und ist demnach indefinit.
- A_4 ist indefinit, da ${e_1}^T A e_1 = -4 < 0$ und ${e_2}^T A e_2 = 1 > 0$.
- A_5 ist nach dem Hauptminorenkriterium negativ definit.
- A_6 hat die Eigenwerte $0, -1, -2$ und ist demnach negativ semidefinit.

(b) Wir berechnen die Determinanten der Hauptminoren: $\det B_1 = 3 > 0$ (somit kann B nie negativ definit sein), $\det B_2 = 2 > 0$ und $\det B = 2a - 1$. Damit B positiv definit ist, muss $\det B > 0$ sein, also $a > \frac{1}{2}$.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Zu einer symmetrischen, positiv semidefiniten Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ existiert eine symmetrische, positiv definite Matrix $P \in M_n(\mathbb{R})$, für die $A = P^2$ gilt. Ist A positiv definit, so auch P.

Lösung: Da A symmetrisch und reell ist, ist A normal. Also existiert eine orthogonale Matrix S, so dass $A = SDS^T$ ist, wobei D eine Diagonalmatrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ von A auf der Diagonalen ist. Da A positiv semidefinit ist, gilt $\lambda_i \geq 0$ für alle $i = 1, \dots, n$. Setzen wir nun $Q := \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, so gilt $Q^2 = D$. Nun setzen wir $P := SQS^T$. Dann gilt

$$P^2 = (SQS^T)(SQS^T) = SQ^2S^T = SDS^T = A.$$

P ist offensichtlich symmetrisch. Da P und Q ähnlich sind und die Eigenwerte von Q alle ≥ 0 sind, ist P positiv semidefinit.

Ist A positiv definit, so gilt $\lambda_i > 0$ und somit auch sind auch die Eigenwerte von Q alle positiv, woraus die positive Definitheit von P folgt.

Aufgabe H3 (5 Punkte)

Wir betrachten den reellen Vektorraum der symmetrischen reellen 2×2-Matrizen.

(a) Zeigen Sie, dass $\det : V \to \mathbb{R}$ eine quadratische Form ist.

(b) Bestimmen Sie die Matrix der assoziierten Bilinearform bezüglich der Basis

$$B = \left(B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right).$$

(c) Bestimmen Sie die Hauptachsen und skizzieren Sie die Mengen

$$\{u \in V \mid \det u = 1\}, \quad \{u \in V \mid \det u = -1\}$$

als Teilmengen des $\mathbb{R}^3$, wenn jede Matrix mit ihren Koordinaten bezüglich obiger Basis identifiziert wird.

Lösung:

(a) Es seinen $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_3 \\ b_3 & b_2 \end{pmatrix} \in V$. Dann gilt $\det(\lambda A) = \lambda^2 a_1 a_2 - \lambda^2 a_3^2 = \lambda^2(a_1 a_2 - a_3^2) = \lambda^2 \det A$. Weiter sieht man für die Form

$$\begin{aligned} F(A,B) &= \tfrac{1}{2}(\det(A+B) - \det A - \det B) \\ &= \tfrac{1}{2}((a_1+b_1)(a_2+b_2) - (a_3+b_3)^2 - (a_1 a_2 - a_3^2) - (b_1 b_2 - b_3^2)) \\ &= \tfrac{1}{2}(a_1 b_2 + a_2 b_1 - 2a_3 b_3), \end{aligned}$$

dass diese bilinear ist (denn es gelten (B1) und (B2)).

(b) Um die Matrix der assoziierten Bilinearform zu bestimmen, müssen wir $F(B_i, B_j)$ für $i,j = 1,2,3$ berechnen:

$$\begin{aligned} &F(B_1,B_1) = 0 \\ &F(B_1,B_2) = F(B_2,B_1) = \tfrac{1}{2} \\ &F(B_1,B_3) = F(B_3,B_1) = 0 \\ &F(B_2,B_2) = 0 \\ &F(B_2,B_3) = F(B_3,B_2) = 0 \\ &F(B_3,B_3) = -1. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir die Matrix

$$M := [F]_B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c) Wir führen Hauptachsentransformation mit M durch:

- Charakteristisches Polynom: $P_M(\lambda) = (-1-\lambda)(\lambda^2 - \frac{1}{4})$
- Eigenwerte: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$
- Normierte Eigenvektoren: $u_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Die drei Hauptachsen sind also die eindimensionalen Unterräume von V, die von den Matrizen

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

  aufgespannt werden. Identifizieren wir nun die Unterräume mit ihren Koordinaten bezüglich der Basis B als Teilmenge von $\mathbb{R}^3$, so beschreibt die Quadrik $\{u \in V \mid \det u = 1\}$ ein zweischaliges Hyperboloid mit den Hauptachsen, die von den Vektoren $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^3$ erzeugt werden. Die Menge $\{u \in V \mid \det u = -1\}$ beschreibt entsprechend ein einschaliges Hyperboloid.