Lineare Algebra II
10. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
14./15. Januar 2013

Gruppenübung

Aufgabe G1
Gegeben sei die Quadrik

$$\{x \in \mathbb{R}^2 \mid 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1\}.$$

Bestimmen Sie die Hauptachsen und den Typen der Quadrik.

Lösung: Wir führen die Hauptachsentransformation wie im Skript beschrieben durch:

- Mit
$$A = \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$
lässt sich die Gleichung $7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1$ schreiben als $x^TAx = 1$.
- Das charakteristische Polynom lautet $p_A(t) = t^2 - 7t - 144$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -9$ und $\lambda_2 = 16$.
- Die Eigenvektoren sind
$$u_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \qquad u_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$
- Die von den Vektoren u_1, u_2 aufgespannten Unterräume bilden die Hauptachsen der Quadrik. Da $\lambda_1 = -9 < 0$ und $\lambda_2 = 16 > 0$, beschreibt die Quadrik eine Hyperbel mit den Asymptoten $x_1 = \pm\frac{4}{3}x_2$.

Aufgabe G2
Wir betrachten Gleichungen der Form

$$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + \sum_{i<j}^{n} a_{ij}x_ix_j + \sum_{i=1}^{n} b_ix_i + c = 0,$$

wobei $a_{ij} = a_{ji}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gelte. Die Lösungsmenge bezeichnen wir als *Quadrik*. Wir nehmen an, dass nicht alle Koeffizienten verschwinden.

(a) Schreiben Sie die Gleichung $Q(x) = 0$ für einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ ohne Summenzeichen, indem Sie Matrizen und Vektoren benutzen.

(b) Sei $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ eine affine Transformation, das heißt eine Abbildung der Form $x \mapsto Ax + b$ für $A \in M_n(\mathbb{R}), b \in \mathbb{R}^n$. Zeigen Sie, dass
$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid Q(\phi(x)) = 0\}$$
wieder eine Quadrik ist.

(c) Wir betrachten die folgende Quadrik:
$$\mathcal{Q} := \left\{(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3 \mid -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 = 1\right\}$$
Bestimmen Sie die Hauptachsen von $\mathcal{Q}$ und führen Sie eine Hauptachsentransformation durch. Geben Sie die Transformationsmatrix Q an. Um welches geometrische Objekt handelt es sich bei $\mathcal{Q}$?

Lösung:

(a) Wir definieren $A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & 2a_{nn} \end{pmatrix}$ und $b = (b_1, \dots, b_n)$ sowie $x = (x_1, \dots, x_n)$. Dann gilt

$$Q(x_1, \dots, x_n) = 0 \iff Q(x) = x^T A x + b^T x + c = 0.$$

(b) Da ϕ affin ist, gibt es eine Matrix M und einen Vektor t mit $\phi(x) = Mx + t$. Dann folgt

$$\begin{aligned} Q(\phi(x)) &= (Mx+t)^T A(Mx+t) + b^T(Mx+t) + c \\ &= x^T(M^TAM)x + x^TM^TAt + (b^TM + t^TAM)x + b^Tt + t^TAt + c \\ &= x^T(M^TAM)x + (2t^TAM + b^TM)x + b^Tt + t^TAt + c \\ &= x^T(M^TAM)x + (M^T(2At+b))^T x + b^Tt + t^TAt + c. \end{aligned}$$

Setzen wir also $\tilde{A} := M^TAM$, $\tilde{b} := M^T(2At + b)$ und $\tilde{c} := b^Tt + t^TAt + c$, dann gilt

$$Q(\phi(x)) = x^T\tilde{A}x + \tilde{b}^Tx + \tilde{c},$$

so dass wir wieder eine Quadrik erhalten.

(c) In Matrixform ist $\mathcal{Q}$ durch die Lösungsmenge der Gleichung

$$x^T \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}}_{=:A} x = 1$$

gegeben. Wir führen eine Hauptachsentransformation durch. Die Eigenwerte von A sind -1 und 2. Ein Hauptachsensystem erhalten wir, indem wir ein Orthonormalsystem aus Eigenvektoren bestimmen. Als Eigenvektoren berechnen wir

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ zum EW } -1, \qquad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ zum EW } 2.$$

Das Gram-Schmidt-Verfahren liefert und ein Hauptachsensystem:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformieren wir A nun mit der Matrix

$$Q := \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix},$$

dann gilt

$$Q^TAQ = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere sehen wir, dass es sich bei $\mathcal{Q}$ um ein zweischaliges Hyperboloid handelt.

Aufgabe G3

(a) Sei $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein unitärer Raum. Wir betrachten V als $\mathbb{R}$-Vektorraum $V_{\mathbb{R}}$, schränken die Skalarmultiplikation $\mathbb{C} \times V \to V$ auf $\mathbb{R}$ ein und definieren

$$(v, w) := \operatorname{Re}\langle v, w\rangle.$$

Zeigen Sie, dass $V_{\mathbb{R}}$ mit dem Skalarprodukt $(\cdot,\cdot)$ zu einem euklidischen Raum wird.

(b) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis des komplexen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Welche Dimension hat $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum? Geben Sie eine Basis an. Finden Sie Vektoren, die in $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum linear abhängig sind, in $\mathbb{C}^2$ als $\mathbb{R}$- Vektorraum jedoch nicht.

Lösung:

(a) Es ist $(v, w) = \frac{1}{2}(\langle v, w\rangle + \overline{\langle v, w\rangle})$. Zu zeigen ist, dass diese Abbildung symmetrisch, bilinear und positiv definit ist.

Für die Symmetrie berechnen wir

$$2(w, v) = \langle w, v\rangle + \overline{\langle w, v\rangle} = \overline{\langle v, w\rangle} + \langle v, w\rangle = 2(v, w).$$

Die Linearität in der ersten Komponente sehen wir an

$$2(v + \alpha v', w) = \left\langle v + \alpha v', w\right\rangle + \overline{\left\langle v + \alpha v', w\right\rangle} = \langle v, w\rangle + \alpha \left\langle v', w\right\rangle + \overline{\langle v, w\rangle} + \overline{\alpha} \cdot \overline{\left\langle v', w\right\rangle} = 2\big((v, w) + \alpha(v', w)\big),$$

da $\alpha \in \mathbb{R}$ und damit $\overline{\alpha} = \alpha$ gilt. Die Linearität in der zweiten Komponente folgt durch die oben gezeigte Symmetrie.

Es ist $2(v, v) = \langle v, v\rangle + \overline{\langle v, v\rangle} \geq 0$, denn $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ist ein Skalarprodukt und damit selbst positiv definit.

Aus $(v, v) = 0$ folgt $\langle v, v\rangle + \overline{\langle v, v\rangle} = 0$, und da beide Summanden nicht negativ sind, müssen sie beide verschwinden. Dies ist aber nur der Fall, wenn $v = 0$ gilt, denn $\langle \cdot, \cdot\rangle$ ist ein Skalarprodukt. Somit haben wir auch die Positivität gezeigt.

(b) Wir behaupten, dass $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ eine Basis von $\mathbb{C}^n$ als $\mathbb{R}$- Vektorraum bildet.

Sei $v \in \mathbb{C}^n$. Da die v_j eine Basis bilden, gibt es komplexe Koeffizienten $\lambda_j = \xi_j + i\eta_j$, so dass

$$v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$$

eine eindeutige Linearkombination ist. Dann ist aber auch

$$v = \xi_1 v_1 + \eta_1(iv_1) + \ldots + \xi_n v_n + \eta_n(iv_n)$$

eine eindeutige Linearkombination der Vektoren $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ mit reellen Koeffizienten. Folglich ist $(v_1, iv_1, \ldots, v_n, iv_n)$ eine Basis des reellen Vektorraums $\mathbb{C}^n$. Damit ist die Dimension insbesondere $2n$.

Die Vektoren $v_1 := (1, 0)^T$ und $v_2 := (i, 0)^T$ sind in $\mathbb{C}^2$ über $\mathbb{C}$ linear abhängig, denn es ist $v_1 = iv_2$. Über $\mathbb{R}$ sind sie jedoch unabhängig, denn aus $v_1 = \lambda v_2$ folgt $\lambda i = 1$ und damit $\lambda = -i \notin \mathbb{R}$. Es gibt also keine reelle Linearkombination des Nullvektors aus v_1 und v_2, so dass sie linear unabhängig sind.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Gegeben sei die quadratische Hyperfläche

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, Q(x_1, x_2) = 7x_1^2 + 24x_1x_2 + 14x_1 + 24x_2 + 6 = 0 \right\}.$$

(a) Bringen Sie die Quadrik auf die Form

$$Q(x_1 + a, x_2 + b) = (x_1, x_2)A(x_1, x_2)^T = 1.$$

Hinweis: Vergleichen Sie mit der Quadrik aus Aufgabe G1.

(b) Wie sieht die zugehörige quadratische Form Q aus?

(c) Führen Sie für Q eine Hauptachsentransformation durch.

(d) Was sind die Hauptachsen der quadratischen Hyperfläche und von welchem Typ ist sie?

(e) Skizzieren Sie die quadratische Hyperfläche.

Lösung:

(a) Wir schreiben die Hyperfläche um in

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7(x_1+1)^2 + 24(x_1+1)x_2 = 1 \right\}.$$

Wir können also stattdessen

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; 7x_1^2 + 24x_1x_2 = 1 \right\}.$$

betrachten und zuletzt die Verschiebung um $(-1,0)^T$ anwenden.

(b) Die quadratische Form Q hat die Gestalt

$$Q(x) = 7x_1^2 + 24x_1x_2 = x^T \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} x \quad \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 .$$

Die zu Q gehörige symmetrische Bilinearform hat also die Strukturmatrix

$$A := \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix}$$

(bzgl. der Standardeinheitsbasis).

(c) Für die Hauptachsentransformation bestimmt man zunächt Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A. Es gilt

$$P_A(t) = \det(A - tE) = \det \begin{pmatrix} 7-t & 12 \\ 12 & -t \end{pmatrix} = (7-t)(-t) - 12^2 = t^2 - 7t - 144 .$$

Die Eigenwerte von A sind also $\lambda_1 = 16$ und $\lambda_2 = -9$. Als zugehörigen Eigenvektoren berechnet man

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ und } v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix} .$$

Diese beiden Vektoren haben die Norm 5, d.h.

$$B = \left(\frac{1}{5} v_1, \frac{1}{5} v_2 \right)$$

ist eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren. Die Matrix der obigen Bilinearform hat dann bzgl der Basis B die Gestalt

$$\frac{1}{25} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 12 \\ 12 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} .$$

D.h. bzgl. der Basis B hat Q die Gestalt

$$Q(x) = 16x_1^2 - 9x_2^2 \quad \forall x = \frac{1}{5} x_1 v_1 + \frac{1}{5} x_2 v_2 \in \mathbb{R}^2 .$$

(d) Aus Aufgabenteil (c) liest man ab, dass die Hauptachsen die Geraden in Richtung

$$v_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ bzw. } v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

sind. Da ein Eigenwert von A positiv und einer negativ ist, handelt es sich bei dieser quadratischen Hyperfläche um eine Hyperbel. Die transformierte Hyperfläche hat die asymptotischen Geraden $x_2 = \pm\frac{4}{3}x_1$.

(e) Man zeichnet zunächst die transformierte Hyperbel mit den in Aufgabenteil (d) angegebenen Asymptoten. Die Schnittpunkte dieser Hyperbel mit der x_1-Achse liegen bei $(\frac{1}{4}, 0)$ und $(-\frac{1}{4}, 0)$.
Um die originale quadratische Hyperfläche zu zeichnen, muss man die transformierte Hyperfläche zunächst so drehen, dass das Bild der Koordinatenachsen mit den Hauptachsen zusammenfällt und dann um $(-1,0)^T$ verschieben.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Es sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum und $Q : V \to \mathbb{K}$ eine quadratische Form. Zeigen Sie, dass dann für alle $x, y \in V$

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2(Q(x) + Q(y))$$

gilt.

Lösung: Es seien $x, y \in V$ beliebig.
Wegen der Definition einer quadratischen Form ist die Abbildung F mit

$$F(x,y) := \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right)$$

eine Bilinearform. Außerdem ist

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x)\,\forall \lambda \in \mathbb{K}\,.$$

Insbesondere gilt

$$\begin{aligned}
0 &= F(x,y) - F(x,y) = F(x,y) + F(x,-y) = \frac{1}{2}\left(Q(x+y) - Q(x) - Q(y)\right) + \frac{1}{2}\left(Q(x-y) - Q(x) - Q(-y)\right) \\
&= \frac{1}{2}\Big(Q(x+y) - Q(x) - Q(y) + Q(x-y) - Q(x) - (-1)^2 Q(y)\Big) \\
&= \frac{1}{2}\left(Q(x+y) + Q(x-y) - 2\cdot Q(x) - 2\cdot Q(y)\right)\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt die Behauptung

$$Q(x+y) + Q(x-y) = 2(Q(x) + Q(y))\,.$$

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Wir betrachten in dieser Aufgabe die Abbildungen

$$\begin{aligned}
Q_1 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, &\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto x_1x_2 - x_2x_3 \qquad \text{und} \\
Q_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}, &\qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3\,.
\end{aligned}$$

(a) Sind Q_1 bzw. Q_2 quadratische Formen? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

(b) Eine quadratische Form $Q : V \to \mathbb{K}$ eines $\mathbb{K}$-Vektorraums V heißt positiv definit, wenn für alle $x \in V \setminus \{0\}$

$$Q(x) > 0$$

gilt.
Sind Q_1 bzw. Q_2 positiv definit? Beweisen Sie Ihre Behauptungen.

Lösung:

(a) Man betrachtet die Abbildungen

$$\begin{aligned}
F_1 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, &\qquad (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} y \text{ und} \\
F_2 : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, &\qquad (x,y) \mapsto x^T \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} y\,.
\end{aligned}$$

F_1 und F_2 sind offensichtlich symmetrische Bilinearformen. Außerdem gilt für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} F_1(x,x) &= x^T \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x = x_1x_2 - x_2x_3 = Q_1(x) \text{ und} \\ F_2(x,x) &= x^T \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} x = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 = Q_2(x)\,. \end{aligned}$$

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass jede Abbildung $Q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto F(x,x)$ mit einer symmetrischen Bilinearform F eine quadratische Form ist.

Daraus folgt, dass Q_1 und Q_2 quadratische Formen sind.

Alternativ kann man auch die definierenden Eigenschaften einer quadratischen Form zeigen.

(b) Es gilt

$$Q_1\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = (-1)\cdot 1 - 1 \cdot 1 = -2 < 0\,.$$

D.h. Q_1 ist nicht positiv definit. Außerdem gilt für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} Q_2(x) &= 3x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 2x_1x_3 \\ &= x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 + x_3^2 + x_1^2 - 2x_1x_3 + x_3^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_1 - x_3)^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0 \end{aligned}$$

D.h. Q_2 ist positiv definit.