Lineare Algebra II
1. Übungsblatt

Fachbereich Mathematik
Dr. habil. Matthias Schneider
Dr. Silke Horn
Dipl. Math. Dominik Kremer

WS 2012/13
22./23. Oktober 2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Beweisen oder widerlegen Sie:

i. Seien $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus eines endlich-dimensionalen Vektorraums und λ ein Eigenwert von ϕ. Dann ist die Abbildung $\phi - \lambda\,\mathrm{id}$ bijektiv.

ii. Seien $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus und $0 \neq v \in V$ ein Vektor mit $\phi(-v) = \lambda v$. Dann sind v und $-v$ Eigenvektoren von ϕ.

(b) Was sind die Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}?$$

Lösung:

(a) i. Die Aussage ist falsch. Nach der Vorlesung ist λ Eigenwert, falls $\det(\phi - \lambda\,\mathrm{id}) = 0$ ist.

ii. Die Aussage ist richtig. Es gilt $\phi(v) = -\phi(-v) = -\lambda v$ und $\phi(-v) = \lambda v = -\lambda(-v)$; somit sind v und $-v$ Eigenvektoren zum Eigenwert $-\lambda$.

(b) Die Eigenvektoren sind (bis auf Vielfache) $(1,1)^T$ und $(1,2)^T$.

Aufgabe G2

Berechnen Sie die Determinante der folgenden Matrizen:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung: A_1 ist eine obere Dreiecksmatrix, also $\det A_1 = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$.

Bei A_2 ist die dritte Zeile die Summe der ersten beiden, also $\det A_2 = 0$.

Zieht man bei A_3 die erste von der letzen Zeile ab, so steht danach in der letzten Zeile nur ein Eintrag. Nun kann man nach der letzten Zeile entwickeln und erhält $\det A_3 = -3$.

A_4 ist eine Blockmatrix. Die Determinante ist also das Produkt der Determinanten der Blöcke, also $\det A_4 = (-3) \cdot 2 \cdot (-1) = 6$.

Aufgabe G3

Zeigen Sie, dass die Eigenwerte einer Diagonalmatrix genau die Diagonaleinträge sind. Was sind die zugehörigen Eigenvektoren?

Lösung: Die Vektoren der Standardbasis sind Eigenvektoren zu den Diagonaleinträgen als Eigenwerten.

Aufgabe G4

Sei v ein Eigenvektor einer Matrix A zum Eigenwert λ. Zeigen Sie:

(a) Ist A invertierbar, so gilt $\lambda \neq 0$ und v ist ein Eigenvektor von A^{-1} zum Eigenwert λ^{-1}.

(b) Für jeden Skalar μ ist v ein Eigenvektor von $A-\mu E$ zu Eigenwert $\lambda-\mu$.

(c) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist v ein Eigenvektor von A^n zum Eigenwert λ^n.

Lösung:

(a) Wäre $\lambda = 0$ ein Eigenwert, so wäre A nicht invertierbar. Aus $Av = \lambda v$ folgt dann durch Multiplikation mit $\lambda^{-1}A^{-1}$ von links $A^{-1}v = \lambda^{-1}v$.

(b) Aus $Av = \lambda v$ folgt die Behauptung durch Addition von $-\mu v$.

(c) Die Behauptung ergibt sich mit vollständiger Induktion aus $Av = \lambda v$ durch Linksmultiplikation mit A.

Hausübung

Aufgabe H1 (5 Punkte)
Berechnen Sie für $\lambda \in \mathbb{C}$ die Determinante der $(n \times n)$-Matrix

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

und entscheiden Sie, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ sie invertierbar ist.

Lösung: Wir ziehen zuerst die erste Zeile von allen übrigen Zeilen ab und erhalten

$$A_2 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1-\lambda & \lambda-1 & 0 & \dots & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \lambda-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1-\lambda & 0 & \dots & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

Danach addieren wir die zweite bis n-te Spalte zur ersten hinzu und erhalten so die obere Dreiecksmatrix

$$A_3 = \begin{pmatrix} \lambda+n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}.$$

Da die vorgenommenen Zeilen- und Spaltenumformungen die Determinante nicht verändern, gilt

$$\det A = \det A_2 = \det A_3 = (\lambda+n-1)(\lambda-1)^{n-1}.$$

Somit ist A für alle $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{1, 1-n\}$ invertierbar.

Aufgabe H2 (5 Punkte)

(a) Berechnen Sie die Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Finden Sie damit eine invertierbare Matrix S, so dass $D := S^{-1}AS$ eine Diagonalmatrix ist.

(c) Berechnen Sie A^{13}.

Lösung:

(a) Da A eine obere Dreiecksmatrix ist, sind die Diagonaleinträge die Eigenwerte von A; d. h. Eigenwerte sind $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = 4$. Man sieht sofort, dass $v_1 = (1,0,0)^T$ ein Eigenvektor zu 2 ist. Durch Berechnung des Kerns von $A - \lambda E$ für die anderen beiden Eigenwerte findet man die Eigenvektoren $v_2 = (-3,-2,1)^T$ zum Eigenwert 3 und $v_3 = (1,2,0)^T$ zum Eigenwert 4.

(b) Die Matrix $S = (v_1|v_2|v_3)$ ist invertierbar und es gilt

$$ASe_i = Av_i = \lambda_i v_i = \lambda_i Se_i$$

für den i-ten Einheitsvektor e_i. Es folgt $S^{-1}ASe_i = \lambda_i e_i$, d. h. $D = S^{-1}AS$ ist die Diagonalmatrix

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 3 & \\ & & 4 \end{pmatrix}.$$

(c) Es gilt

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

und somit

$$A^{13} = SD^{13}S^{-1} = \begin{pmatrix} 2^{13} & 2^{25} - 2^{12} & 2^{26} - 3^{14} + 2^{14} \\ 0 & 2^{26} & 2^{27} - 2 \cdot 3^{13} \\ 0 & 0 & 3^{13} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe H3 (5 Punkte)
Sei V ein Vektorraum und $\phi : V \to V$ ein Endomorphismus mit $\phi^2 = \phi$.

(a) Zeigen Sie, dass ϕ nur Eigenwerte 0 und 1 haben kann.

(b) Wie viele Endomorphismen $\phi : V \to V$ mit $\phi^2 = \phi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 0 haben?

(c) Wie viele Endomorphismen $\phi : V \to V$ mit $\phi^2 = \phi$ gibt es, die *nur* den Eigenwert 1 haben?

Lösung:

(a) Für einen Eigenwert λ mit Eigenvektor $v \neq 0$ gilt wegen $\phi^2 = \phi$

$$\lambda v = \phi(v) = \phi(\phi(v)) = \lambda\phi(v) = \lambda^2 v,$$

also gilt $\lambda^2 = \lambda$ und somit $\lambda = 0$ oder $\lambda = 1$.

(b) Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\phi(\phi(v)) = \phi(v)$, d. h. $w := \phi(v)$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 1, falls $w \neq 0$. Besitzt ϕ also nur den Eigenwert 0, so muss $\phi(v) = 0$ für alle $v \in V$ gelten. Es gibt deshalb nur eine solche Abbildung, die Nullabbildung.

(c) Für jeden Vektor $v \in V$ gilt $\phi(v - \phi(v)) = 0$, d. h. $w := v - \phi(v)$ ist ein Eigenvektor zum Eigenwert 0, falls $w \neq 0$. Besitzt ϕ also nur den Eigenwert 1, so muss $v - \phi(v) = 0$ für alle $v \in V$ gelten. Es gibt deshalb nur eine solche Abbildung, die Identität.