Mathematik 1 für Bauwesen
14. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Ivan Izmestiev
Dr. Vince Bárány, M. Sc. Julia Plehnert

Wintersemester 2011/2012
8./9.02.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1

(a) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der durch Drehung des Graphen von $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 10]$ um die x-Achse entsteht.

(b) Berechnen Sie die Mantelfläche des Rotationskörpers, der durch Drehung der Parabel $y = x^2$, $x \in [-1, 1]$ um die y-Achse entsteht.

Lösung:

(a) Die Formel für das Volumen lautet

$$V = \pi \int_1^{10} f(x)^2\, dx = \pi \int_1^{10} \frac{dx}{x^2} = \pi \left(-\frac{1}{x}\right)\Bigg|_1^{10} = \pi \left(1 - \frac{1}{10}\right) = \frac{9\pi}{10}.$$

(b) Die entstehende Fläche (Rotationsparaboloid) kann man auch durch die Drehung des Graphen von $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, 1]$, um die x-Achse erhalten.
Die Formel für die Mantelfläche lautet

$$F = 2\pi \int_0^1 f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

In unserem Fall gilt $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, folglich

$$f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{4x}} = \sqrt{x + \frac{1}{4}}$$

Nun berechnen wir das Integral, indem wir mit $t = x + 1/4$ substituieren

$$F = 2\pi \int_0^1 \sqrt{x + \frac{1}{4}}\, dx = 2\pi \int_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \sqrt{t}\, dt = 2\pi \cdot \frac{2}{3} t\sqrt{t}\Big|_{\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} = \frac{4\pi}{3}\left(\frac{5}{4} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}\right) = \frac{5\sqrt{5} - 1}{6}\pi$$

Aufgabe G2

Bestimmen Sie die Taylor-Reihe von $\tan x$ mit Zentrum 0 bis zur 4. Potenz

(a) mit Hilfe der Taylor-Formel;

(b) durch Division der Taylor-Reihen von $\sin x$ und $\cos x$.

Lösung:

(a) Die Taylor-Reihe der Funktion $f(x)$ hat die Form

$$T(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

$\tan x$ ist eine ungerade Funktion, deswegen ist seine Ableitung eine gerade Funktion, die zweite Ableitung wieder ungerade, usw. Eine ungerade Funktion verschwindet bei $x = 0$, daher gilt $f^{(2k)}(0) = 0$, und die Taylor-Reihe von $\tan x$ enthält nur ungerade Potenzen. Wir müssen deswegen nur $(\tan x)'$ und $(\tan x)'''$ an der Stelle $x = 0$ auswerten.

Berechnen wir die Ableitungen von $f(x) = \tan x$:

$$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\tan x)'' = \frac{2\sin x}{\cos^3 x} \qquad (\tan x)''' = 2\frac{1 + 2\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

Es folgt $(\tan x)'\Big|_{x=0} = 1$ und $(\tan x)'''\Big|_{x=0} = 2$. Also

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots.$$

(b) Es gilt $\tan x = \sin x / \cos x$. Wir benutzen die Reihendarstellung von sin und cos und erhalten:

$$\underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots\right)}_{=\cos x}\left(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \dots\right) = \underbrace{x - \frac{x^3}{6} + \dots}_{=\sin x}$$

Man sieht direkt, dass die Koeffizienten der geraden Potenzen gleich Null sind, bzw. folgt dies aus den Überlegungen im ersten Teil der Aufgabe. Durch Auflösen der Klammern und Vergleich der Koeffizienten bei x und bei x^3 erhalten wir die Gleichungen

$$a_1 = 1$$
$$a_3 - \frac{a_1}{2} = -\frac{1}{6}$$

Folglich $a_3 = \frac{1}{3}$ und $\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \dots$.

Aufgabe G3

Mit Hilfe der Taylor-Reihen berechnen Sie die Grenzwerte

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}$$

(b)

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x} - 1}$$

Lösung:

(a) Die Taylor-Reihen von sin und cos ergeben

$$\cos 2x = 1 - \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} - \dots = 1 - 2x^2 + \dots$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \dots$$

Folglich

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - (1 - 2x^2 + \dots)}{x(x - \frac{x^3}{6} + \dots)} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + \dots}{x^2 + \dots} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(2 + \dots)}{x^2(1 + \dots)} = 2$$

(b) Die Taylor-Reihen des natürlichen Logarithmus bzw. der Quadratwurzel lauten:

$$\ln(1+t) = t - \frac{t^2}{2} + t^3 3 - \frac{t^4}{4} + \ldots \quad \text{bzw.} \quad \sqrt{1+t} = 1 + \frac{t}{2} - \frac{t^2}{8} + \frac{t^3}{16} - \ldots.$$

Mit Substitution $x = 1 + t$ wird die Aufgabe auf einen Grenzwert bei $t \to 0$ zurückgeführt:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{\sqrt{x} - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t} - 1}$$

Es stellt sich heraus, dass von den Reihenentwicklungen von $\ln(1+t)$ und $\sqrt{1+t}$ nur die Glieder erster Ordnung gebraucht werden:

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{\sqrt{1+t} - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t + \ldots}{(1 + \frac{t}{2} + \ldots) - 1} = \lim_{t\to 0} \frac{t + \ldots}{\frac{t}{2} + \ldots} = 2$$

Aufgabe G4 (Zusatzaufgabe)
Man zerschneidet die Einheitssphäre mit Zentrum im Nullpunkt mit den Ebenen $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -0,8\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -0,6\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = -0,4\}$, $\ldots$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0,8\}$ in 10 Teile. Zeigen Sie, dass alle diese Teile den gleichen Flächeninhalt haben.

Lösung:

Berechnen wir den Flächeninhalt des Teiles der Sphäre zwischen zwei Ebenen $x = a$ und $x = b$ unter Verwendung der Formel für die Mantelfläche eines Rotationskörpers

$$F = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx$$

Wir haben $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Es ergibt sich $f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ und daraus

$$\sqrt{1 + f'(x)^2} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Also

$$F = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 - x^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_a^b dx$$

Das heißt, der Flächeninhalt hängt nur von der Länge $b - a$, und nicht von der Lage des Integrationsintervalls. Daraus folgt die Behauptung.

Aufgabe G5 (Zusatzaufgabe)
Sei (a_n) die Fibonacci-Folge:

$$a_0 = a_1 = 1, \quad a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$$

Betrachten wir die entsprechende Potenzreihe

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots$$

Diese Reihe hat Konvergenzradius $\frac{2}{1+\sqrt{5}}$, denn $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, also definiert sie eine Funktion

$$f : \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right) \to \mathbb{R},$$

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 8x^5 + \ldots.$

(a) Zeigen Sie: $f(x) + xf(x) = \frac{f(x)-1}{x}$ und leiten Sie daraus die Formel

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$$

her.

(b) Benutzen Sie die Nullstellen $\varphi_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $\varphi_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ der quadratischen Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$, um eine Partialbruchzerlegung der Funktion f herzuleiten.

(c) Beweisen Sie mit der geometrischen Reihe die Formel von Moivre-Binet für die Fibonacci-Zahlen:

$$a_n = \frac{(-1)^n \left(\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Lösung:

(a) Wir setzen $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$ ein und formen um:

$$f(x) + xf(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots) + (a_0 x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + \ldots) = a_0 + (a_0 + a_1)x + (a_1 + a_2)x^2 + \ldots$$

Da $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$ und $a_0 = a_1$ gilt, erhalten wir:

$$f(x) + xf(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \ldots = \frac{f(x) - a_0}{x} = \frac{f(x)-1}{x}.$$

Eine Umstellung nach $f(x)$ liefert $f(x) = \frac{1}{1-x-x^2}$.

(b) Der Ansatz der Partialbruchzerlegung ist:

$$f(x) = \frac{1}{1-x-x^2} = -\frac{1}{x^2+x-1} = -\left(\frac{A}{x-\varphi_1} + \frac{B}{x-\varphi_2}\right).$$

Durch Auflösen des daraus resultierenden Gleichungssystems ergibt sich $A = 1/\sqrt{5}$ und $B = -1/\sqrt{5}$. Also erhalten wir

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}(x-\varphi_2)} - \frac{1}{\sqrt{5}(x-\varphi_1)}.$$

(c) Um die geometrische Reihe zu benutzen, erweitern wir die Brüche mit φ_1 bzw. φ_2, da $\varphi_1\varphi_2 = -1$ gilt, erhalten wir:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{\varphi_1}{1+\varphi_1 x} - \frac{\varphi_2}{1+\varphi_2 x}\right) = \frac{\varphi_1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\varphi_1 x} - \frac{\varphi_2}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\varphi_2 x}.$$

Mit $t_i = -\varphi_i x$ gilt $|t| < 1$, da $x \in \left(-\frac{2}{1+\sqrt{5}}, \frac{2}{1+\sqrt{5}}\right)$. Damit folgt aus der Formel der Summe der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{1+\varphi_i x} = \frac{1}{1-t_i} = 1 + t_i + t_i^2 + \ldots = 1 + (-\varphi_i x) + (-\varphi_i x)^2 + (-\varphi_i x)^3 + \ldots$$

und somit

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\varphi_1}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\varphi_1 x} - \frac{\varphi_2}{\sqrt{5}}\frac{1}{1+\varphi_2 x} \\
&= \frac{\varphi_1}{\sqrt{5}}\left(1-\varphi_1 x + (\varphi_1 x)^2 - (\varphi_1 x)^3 + \dots\right) - \frac{\varphi_2}{\sqrt{5}}\left(1-\varphi_2 x + (\varphi_2 x)^2 - (\varphi_2 x)^3 + \dots\right) \\
&= \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi_1 - \varphi_2 - (\varphi_1^2 - \varphi_2^2)x + (\varphi_1^3 - \varphi_2^3)x^2 + \dots\right) \\
&= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots .
\end{aligned}
$$

Durch Koeffizientenvergleich und entsprechende Umformungen ergibt sich:

$$
a_n = \frac{(-1)^n\left(\varphi_1^{n+1} - \varphi_2^{n+1}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}.
$$