Mathematik 1 für Bauwesen
13. Übungsblatt

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Ivan Izmestiev
Dr. Vince Bárány, M.Sc. Julia Plehnert

Wintersemester 2011/2012
01./02.02.2012

Gruppenübung

Aufgabe G1 (Astroide)
Berechnen Sie die Länge der Astroide $\{(\cos^3 t, \sin^3 t) \mid t \in [0, 2\pi]\}$.

Aufgabe G2 (Lemniskate)
Die Lemniskate von Bernoulli hat die Polardarstellung $r = \sqrt{2\cos 2\varphi}$, $\varphi \in [-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$. Skizzieren Sie diese Kurve und berechnen Sie den von ihr eingeschlossenen Flächeninhalt.

Aufgabe G3
Berechnen Sie die Krümmung des Graphen von $f(x) = \ln x$ und finden Sie die Scheitelpunkte des Graphen (Extrempunkte der Krümmung).

Aufgabe G4
Finden Sie die Lage des Schwerpunktes des Einheitskreisbogens, der die Länge 2α hat.

Aufgabe G5 (Zusatzaufgabe)
Mit Hilfe des Integralkriteriums bestimmen Sie, ob die folgenden Reihen konvergieren:

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln k} \qquad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^2 k}.$$

Aufgabe G6 (Zusatzaufgabe)

(a) Basierend auf der Formel

$$F = \frac{1}{2} \left| \int_a^b (x(t)\dot{y}(t) - y(t)\dot{x}(t))\, dt \right| \tag{1}$$

für den Flächeninhalt eines Sektors mit der Randkurve $\{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$, beweisen Sie die folgenden Formeln für denselben Flächeninhalt:

$$F = \left| \frac{x(t)y(t)}{2}\Big|_a^b - \int_a^b x(t)\dot{y}(t)\, dt \right| = \left| \frac{x(t)y(t)}{2}\Big|_a^b - \int_a^b \dot{x}(t)y(t)\, dt \right|.$$

(b) Sei $\{(x(t), y(t)) \mid t \in [a, b]\}$ eine geschlossene Kurve: $(x(a), y(a)) = (x(b), y(b))$, die mit jedem vom Nullpunkt ausgehenden Strahl genau einen Schnittpunkt hat. Beweisen Sie die folgenden Formeln für den Flächeninhalt des durch die Kurve berandeten Bereichs:

$$F = \left| \int_a^b x(t)\dot{y}(t)\, dt \right| = \left| \int_a^b \dot{x}(t)y(t)\, dt \right|.$$

Gilt die Formel auch ohne die Voraussetzung für die vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen?

Aufgabe G7 (Zusatzaufgabe)
Ein freihängendes biegeweiches Seil nimmt die Form einer Kettenlinie:

$$y = c\cosh\frac{x}{c}$$

für eine Konstante $c > 0$ an.

(a) Zeigen Sie, dass c gleich dem Krümmungsradius der Kettenlinie in ihrem Scheitelpunkt ($x = 0$) ist.

(b) Berechnen Sie die Länge und den Durchhang der Kettenlinie (mit beliebigem Parameterwert c) zwischen den Punkten mit Abszissen 1 und -1.

(c) Zwischen zwei Punkten auf der gleichen Höhe und im Abstand von 2m voneinander wird ein Seil der Länge 3,63m aufgehängt. Wie tief hängt es durch? (*Hinweis:* $3,63 \approx \sinh 2$)

Hausübung

Aufgabe H1 (6 Punkte)
Für die geschlossene Schlinge

$$x = 3t^2 - 1, \quad y = 3t^3 - t, \quad t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

berechnen Sie:

(a) (3 Punkte) die Länge;

(b) (3 Punkte) den Inhalt der umrandeten Fläche.

Aufgabe H2 (5 Punkte)
Berechnen Sie die Länge der Kardioide $r = 1 + \cos\varphi$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Aufgabe H3 (4 Punkte)
Berechnen Sie die Krümmung in jedem Punkt der Zykloide

$$x(t) = t - \sin t, \qquad y(t) = 1 - \cos t$$

Wie groß ist die Krümmung im höchsten Punkt der Zykloide?

Aufgabe H4 (5 Punkte)
Finden Sie die Koordinaten des Schwerpunktes der durch die Kurven $y = x^2$ und $y = \sqrt{x}$ berandeten Fläche. Fertigen Sie vorher eine Skizze der Fläche an.

Treffpunkt zur Klausurvorbereitung: 2 Wochen vor der Klausur, nähere Infos unter
`http://www.bauing.tu-darmstadt.de/studiumundlehre_1/treffpunkt_mathematik/ingenieurtutoriummatheii.de.jsp`
Abgabetermin der Hausübungen: Am 8. bzw. 9. Februar 2012 zu Beginn der Übungen.