

Mathematik 1 für Bauwesen

10. Übungsblatt



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Ivan Izmestiev
Dr. Vince Bárány, M. Sc. Julia Plehnert

Wintersemester 2011/2012
11./12.01.20

Gruppenübung

Aufgabe G1

Mit Hilfe der l'Hospital-Regel berechnen Sie die Grenzwerte:

- (a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1-x}{1-\sin \frac{\pi x}{2}}$
(b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\cosh x - 1}{1 - \cos x}$
(c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{3}{x^2}}$

Aufgabe G2

Sei P der Punkt mit Koordinaten $(0, \frac{1}{4})$ und sei G die Gerade mit der Gleichung $y = -\frac{1}{4}$. Finden Sie die Gleichung der Kurve, deren Punkte von P und G gleich entfernt sind.

Aufgabe G3

Leiten Sie die Gleichung der Tangente im Punkt $(2, 2) = (x(1), y(1))$ zur Kurve

$$x(t) = \frac{1+t}{t^3}, \quad y(t) = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}$$

her.

Aufgabe G4 (Zusatzaufgabe)

Finden Sie die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen von $x^3 - 2$. Setzen Sie $a_0 = 1$ und berechnen Sie a_1, a_2, a_3, a_4 . Vergleichen Sie die Ergebnisse mit $\sqrt[3]{2}$.

Aufgabe G5 (Zusatzaufgabe)

Sei P ein Punkt auf der Ellipse $\left\{ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right\}$ und sei Q ein Punkt auf dem Kreis $\{x^2 + y^2 = a^2\}$, sodass P und Q die gleiche x -Koordinate haben. Zeigen Sie, dass der Schnittpunkt der Tangente im Punkt P an die Ellipse und der Tangente im Punkt Q an den Kreis auf der x -Achse liegt.

Aufgabe G6 (Zusatzaufgabe)

- (a) Berechnen Sie den Geschwindigkeitsvektor in jedem Punkt der Zykloide:

$$x = t - \sin t, \quad y = 1 - \cos t.$$

Für welche Werte von t verschwindet der Geschwindigkeitsvektor? Welche Punkte der Zykloide entsprechen diesen Werten von t ?

- (b) Zeigen Sie, dass der Geschwindigkeitsvektor der Trochoide (der verlängerten Zykloide)

$$x = t - 2 \sin t, \quad y = 1 - 2 \cos t$$

nirgends gleich Null ist.

Hausübung

Aufgabe H1

(8 Punkte)

Mit Hilfe der l'Hospital-Regel berechnen Sie die Grenzwerte:

- (a) (2 Punkte) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$
- (b) (3 Punkte) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin 2x)}{\ln(\sin x)}$
- (c) (3 Punkte) $\lim_{x \rightarrow 0} x^x$.

Aufgabe H2

(4 Punkte)

Finden Sie die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstellen von $x^2 - x - 1$. Beginnend mit $a_0 = 1$, berechnen Sie a_1, a_2, a_3 .

Aufgabe H3

(5 Punkte)

Sei $C = \left\{ P(t) \mid t \in \left[-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right] \right\}$ mit $P(t) = (3t^2 - 1, 3t^3 - t)$ eine parametrisierte Kurve.

- (a) (1 Punkt) Zeigen Sie, dass C eine geschlossene Schlinge ist: $P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- (b) (2 Punkte) Berechnen Sie die Steigungen der beiden Tangenten an die Kurve C im Punkt $P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = P\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.
- (c) (2 Punkte) Finden Sie die Koordinaten der Punkte, in denen die Tangente an C senkrecht oder waagrecht ist.

Aufgabe H4

(3 Punkte)

Finden Sie die Koordinaten der Brennpunkte der Ellipse $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$.