Mathematik 1 für Bauwesen
Übungsblatt 7

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Ivan Izmestiev
Dr. Vince Bárány
M.Sc. Julia Plehnert

Wintersemester 2011/2012
2. Dezember 2011

Gruppenübungen

Aufgabe 7.1

Berechnen Sie die n-te Partialsumme der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$ und zeigen Sie, dass die Reihe divergiert.

Aufgabe 7.2

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie bei den konvergenten Reihen an, ob diese auch absolut konvergieren.

$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2)\cdot \ln k}{k^4}$ $\qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{k}{(k+1)(k+2)}$

$$c)\ 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(2k-1)^3} - \frac{1}{(2k)^2} + \ldots$$

Aufgabe 7.3

Beweisen Sie die folgende Abschätzung einer Partialsumme der harmonischen Reihe.

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots \frac{1}{n} \ \geq\ \frac{1+\log_2 n}{2}$$

(*Hinweis:* Betrachten Sie die Zahl $m \in \mathbb{N}$, für welche gilt $2^m \leq n < 2^{m+1}$ und benutzten Sie eine Abschätzung aus der Vorlesung.)

Zusatzaufgaben

Aufgabe 7.4

a) Zeigen Sie, dass die Reihe $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)q^k$ für $|q| < 1$ konvergiert.

b) Zeigen Sie die Gleichung $\sum_{k=0}^{n}(k+1)q^k = \frac{1-q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{(n+1)q^{n+1}}{1-q}$.

$$\begin{array}{rcccccccccc} \textit{Hinweis:} & & 1 & + & 2q & + & 3q^2 & + & \dots & + & (n+1)q^n \\ & = & 1 & + & q & + & q^2 & + & \dots & + & q^n & + \\ & & & + & q & + & q^2 & + & \dots & + & q^n & + \\ & & & & & + & q^2 & + & \dots & + & q^n & + \\ & & & & & & & + & \dots & & \end{array}$$

c) Zeigen Sie, dass $\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)q^k = \frac{1}{(1-q)^2}$.

Aufgabe 7.5

Zeigen Sie, dass für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 2m\pi$ gilt:

$$1 + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$$

Folgern Sie daraus, dass die Partialsummen der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \cos k\alpha$ (bei $\alpha \neq 2m\pi$) beschränkt sind. (*Hinweis:* die Gleichung kann mit Induktion bewiesen werden; um sie herzuleiten, kann man den Realteil der Summe $\sum_{k=0}^{n} e^{ik\alpha}$ berechnen.)

Hausaufgaben

Aufgabe 7.6 — 6 Punkte

Berechnen Sie die Summen folgender Reihen.

$$a)\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^{k+2}+3^{k+1}}{5^k} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{14}{10^k}$$

Aufgabe 7.7 — 9 Punkte

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Geben Sie bei den konvergenten Reihen an, ob diese auch absolut konvergieren.

$$a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sqrt[3]{k}}{(k+1)\sqrt{k}} \qquad b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^k} \qquad c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$$

Aufgabe 7.8 — 5 Punkte

Wie in der Vorlesung bewiesen, ist $e^{-1} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \ldots$.
Welche Partialsumme dieser Reihe muss man nehmen, um die Zahl e^{-1} mit einem Fehler $< 0,0002$ abzuschätzen? Mit Hilfe des Taschenrechners, berechnen Sie diese Partialsumme und die Zahl e^{-1}.

Abgabetermin der Hausübungen: 14. bzw. 15. Dezember 2011 zu Beginn der Übung.