# Mathematik 1 für Bauwesen
# Übungsblatt 6

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

**Fachbereich Mathematik**
**Dr. Ivan Izmestiev**
Dr. Vince Bárány
M.Sc. Julia Plehnert

**Wintersemester 2011/2012**
**24. November 2011**

## Gruppenübungen

### Aufgabe 6.1

Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)$ konvergent, bestimmt divergent (gegen $\pm\infty$) oder divergent ist. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert.

$$a)\ \ a_n = \frac{n\sin(2^n)}{n^2+n+1} \qquad b)\ \ a_n = \frac{10^n - 5^n}{10^n + 5^n}$$

$$c)\ \ a_n = \sqrt[n]{\ln n} \qquad d)\ \ a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2}$$

### Aufgabe 6.2

Zeigen Sie: wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ mit $a \neq 0$, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1$ .

### Aufgabe 6.3

Zeigen Sie: wenn $(a_n)$ eine konvergente Folge und $(b_n)$ eine divergente Folge ist, dann ist die Folge $(a_n + b_n)$ divergent. (*Hinweis:* Widerspruchsbeweis)

### Aufgabe 6.4

Betrachten wir die rekursiv definierte Folge

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{2}{a_n}\right) \text{ für } n \geq 1$$

a) Zeigen Sie, dass $a_n \geq \sqrt{2}$ für alle $n$ gilt. (*Hinweis:* Beweisen Sie die Ungleichung $x + \frac{b^2}{x} \geq 2b$ für alle $b \in \mathbb{R}$ und $x > 0$.)

b) Zeigen Sie, dass $(a_n)$ eine monoton fallende Folge ist.

c) Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

## Zusatzaufgaben

### Aufgabe 6.5

Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)$ konvergent, bestimmt divergent (gegen $\pm\infty$) oder divergent ist. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert.

a) $a_n = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n^2}$ b) $a_n = \sqrt{n(n+1)} - n$ c) $a_n = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n + \sqrt{n + \sqrt{n}}}}$

### Aufgabe 6.6

a) Geben Sie eine Folge $(a_n)$ an, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und für welche $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0$.

b) Geben Sie eine Folge $(a_n)$ an, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und so dass $\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$ divergiert.

### Aufgabe 6.7

Zeigen Sie, dass die rekursiv definierte Folge $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n + \frac{1}{a_n}$ nicht beschränkt ist. (*Hinweis:* Widerspruchsbeweis.)

## Hausaufgaben

### Aufgabe 6.8 — 10 Punkte

Untersuchen Sie, ob die Folge $(a_n)$ konvergent, bestimmt divergent (gegen $\pm\infty$) oder divergent ist. Im Falle der Konvergenz bestimmen Sie den Grenzwert.

*a)* $a_n = \frac{n + \sqrt{n}}{3n + 2\sqrt{n} + 1}$ *b)* $a_n = \sqrt[n]{n^2}$

*c)* $a_n = (\ln n - \ln(\ln n))$ *d)* $a_n = \left(1 + \frac{1}{\ln n}\right)^n$

### Aufgabe 6.9 — 4 Punkte

a) Geben Sie eine Folge $(a_n)$ an, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und so dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$.

b) Geben Sie eine Folge $(a_n)$ an, mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ und für welche $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ gilt.

### Aufgabe 6.10 — 7 Punkte

Geben Sie Beispiele zweier Folgen $(a_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ und $(b_n)$ mit $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$, so dass

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = 0$

b) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n b_n = \infty$

c) die Folge $(a_n b_n)$ ist weder konvergent, noch bestimmt divergent.

**Abgabetermin der Hausübungen:** 7. bzw. 8. Dezember 2011 zu Beginn der Übung.