Mathematik 1 für Bauwesen
Übungsblatt 5

Fachbereich Mathematik
Dr. Ivan Izmestiev
Dr. Vince Bárány
M.Sc. Julia Plehnert

Wintersemester 2011/2012
19. November 2011

Gruppenübungen

Aufgabe 5.1

Betrachten wir die folgenden zwei harmonischen Schwingungen von Kreisfrequenz 1:

$$f(t) = \frac{7}{2}\sin t - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos t \qquad g(t) = -3\sin t + \sqrt{3}\cos t$$

a) Bestimmen Sie die Amplituden von f und g.

b) Bestimmen Sie die Amplitude und die Anfangsphase von $f + g$.

Aufgabe 5.2

Lösen Sie folgende Gleichungen.

$$a)\ \ 2\sqrt[3]{x} + 5\sqrt[6]{x} - 18 = 0 \qquad b)\ \ \left(\log_{10}(x^2)\right)^2 = 1$$

Aufgabe 5.3

Seien

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = e^x, \quad h(x) = x^2 \,.$$

Zeigen Sie:

$$\begin{aligned} g \circ f &= h \circ g \\ f \circ f \circ h &= h \circ f \end{aligned}$$

Aufgabe 5.4

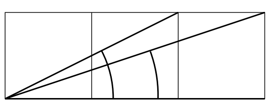
Mit Hilfe der Formel

$$\tan(\phi + \psi) = \frac{\tan\phi + \tan\psi}{1 - \tan\phi\,\tan\psi}$$

beweisen Sie, dass

$$\arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arctan 1$$

gilt. Was sagt es über die Summe der Winkel auf dem Bild?



Zusatzaufgaben

Aufgabe 5.5

Sei $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass

$$\sin t + \sin\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) + \sin\left(t + \frac{4\pi}{n}\right) + \cdots + \sin\left(t + \frac{2\pi(n-1)}{n}\right) = 0$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt. (*Hinweis*: Das ist eine Summe von harmonischen Schwingungen. Betrachten Sie das entsprechende Vektordiagramm.)

Aufgabe 5.6

a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der Dezimalstellen in der Zahl 2^n kleiner als $0,30103 \cdot n + 1$, aber größer als $0,301 \cdot n$ ist.

b) Wie viele Dezimalstellen hat die Zahl 2^{2011}?

Aufgabe 5.7

Seien

$$f(x) = 1 - x, \quad g(x) = \frac{1}{x}\ .$$

Beweisen Sie:

$a)$ $f \circ f = \mathrm{id}$ (das heißt $(f \circ f)(x) = x$ für alle x)
$b)$ $g \circ g = \mathrm{id}$
$c)$ $(g \circ f) \circ (g \circ f) \circ (g \circ f) = \mathrm{id}$

Hausaufgaben

Aufgabe 5.8 — 5 Punkte

Bestimmen Sie die Amplitude und die Anfangsphase der harmonischen Schwingung

$$f(t) = 2\sin\left(t + \frac{\pi}{2}\right) + \sin\left(t - \frac{\pi}{6}\right)$$

und skizzieren Sie den Graphen von f.

Aufgabe 5.9 — 6 Punkte

Lösen Sie die Gleichungen:

a) (2 Punkte) $\log_{10}(x + 1,5) = -\log_{10} x$

b) (4 Punkte) $2^{x^2-3} \cdot 5^{x^2-3} = 0,01 \cdot \left(10^{x-1}\right)^3$.

Aufgabe 5.10 — 4 Punkte

In welcher Reihenfolge sollen die Funktionen f_1, f_2, f_3 hintereinander geschaltet werden, um die Funktion f zu bekommen?

a) (2 Punkte) $f_1(x) = -\frac{x}{2}$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = e^x$, $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$

b) (2 Punkte) $f_1(x) = \frac{1}{x}$, $f_2(x) = 1 - x^2$, $f_3(x) = \sqrt{x}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

(Die Antwort soll in der Form $f = f_i \circ f_j \circ f_k$ gegeben und begründet werden.)

Aufgabe 5.11 — 5 Punkte

Sei

$$f(x) = 2x, \quad g(x) = \sin x, \quad h(x) = x + \frac{\pi}{2}$$

Zeigen Sie, dass

$$f((g \circ h)(x) \cdot g(x)) = (g \circ f)(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Abgabetermin der Hausübungen: 30. November bzw. 1. Dezember 2011 zu Beginn der Übung.