

Mathematik 1 für Bauwesen

Übungsblatt 2



TECHNISCHE
UNIVERSITÄT
DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Ivan Izmestiev
Dr. Vince Bárány
M.Sc. Julia Plehnert

Wintersemester 2011/2012
30. Oktober 2011

Gruppenübungen

Aufgabe 2.1

Welcher Winkel ist größer: zwischen den Vektoren $(2, 3)$ und $(3, 2)$ oder zwischen den Vektoren $(1, 0)$ und $(4, 1)$?

Aufgabe 2.2

Zeigen Sie, dass die Ebenen $x - 2y + 3z = -1$ und $4x + 5y + 2z = 17$ orthogonal zueinander sind. (*Hinweis:* Zwei Ebenen sind orthogonal genau dann, wenn ihre Normalenvektoren orthogonal sind.)

Aufgabe 2.3

Sei E die Ebene in \mathbb{R}^3 mit Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + 2\lambda + 3\mu \\ \lambda - \mu \\ 2 - 5\lambda \end{pmatrix}$$

Finden Sie eine implizite Darstellung dieser Ebene.

Aufgabe 2.4

Bezeichnen wir mit \mathbb{Z}^2 die Menge aller Punkten in \mathbb{R}^2 mit ganzzahligen Koordinaten (im Folgenden *Gitterpunkte* genannt):

$$\mathbb{Z}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$$

a) Sei G die Gerade $3x - y = \sqrt{2}$. Zeigen Sie:

$$\min\{\text{dist}(P, G) \mid P \in \mathbb{Z}^2\} = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{10}}$$

(Mit anderen Worten, der kleinste Abstand zwischen einem Gitterpunkt und der Gerade G ist $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{10}}$.)

b) Sei G die Gerade $y = \sqrt{2}x$. Zeigen Sie:

$$\inf\{\text{dist}(P, G) \mid P \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0, 0)\}\} = 0$$

(Mit anderen Worten, es gibt Gitterpunkte im beliebig kleinem Abstand von G .) Gibt es Gitterpunkte auf G (außer dem Koordinatenursprung)?

Zusatzaufgaben

Aufgabe 2.5

Seien A, B, C drei Punkte in \mathbb{R}^2 . Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABC gleich dem Absolutbetrag der Zahl $\frac{1}{2}(\vec{OA} \times \vec{OB} + \vec{OB} \times \vec{OC} + \vec{OC} \times \vec{OA})$ ist. Welche geometrische Bedeutung hat das Vorzeichen?

Aufgabe 2.6

Sei $ABCD$ ein Parallelogramm. Zeigen Sie, dass $|AC|^2 + |BD|^2 = |AB|^2 + |BC|^2 + |CD|^2 + |DA|^2$ (die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich der Summe der Quadrate der Seiten ist).
Hinweis: Wenn $\vec{AB} =: v_1$ und $\vec{AD} =: v_2$, dann $\vec{AC} = v_1 + v_2$ und $\vec{BD} = v_2 - v_1$.

Aufgabe 2.7

Seien $A(3, 2), B(16, -6), C(-5, 7)$ Punkte in \mathbb{R}^2 . Schneiden sich die Strecken OA und BC ?

Hausaufgaben

Aufgabe 2.8

6 Punkte

Gegeben sind Gerade $G = \{(x, y) \mid 2x + 3y = 1\}$ und Punkt $P(33, 50)$ in \mathbb{R}^2 . Sei G' die zu G senkrechte Gerade durch P . Schreiben Sie eine Gleichung von G'

- a) (3 Punkte) in impliziter Form;
- b) (3 Punkte) in Parameterform.

Aufgabe 2.9

6 Punkte

- a) (3 Punkte) Finden Sie den Abstand zwischen den folgenden Geraden in \mathbb{R}^3 :

$$\begin{pmatrix} 1 + 2\lambda \\ -1 + \lambda \\ 3 - 2\lambda \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} -2 + 7\lambda \\ 2\lambda \\ 3 \end{pmatrix}$$

- b) (3 Punkte) Berechnen Sie das Volumen des Tetraeders $ABCD$ mit Eckenkoordinaten

$$A(0, 1, -1), \quad B(1, -1, 0), \quad C(-1, 0, 1), \quad D(-1, -1, -1)$$

Aufgabe 2.10

4 Punkte

Finden Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgerade der Ebenen

$$-2x + y - 3z = 1 \quad \text{und} \quad 3x - z = 5$$

Abgabetermin der Hausübungen: 9. bzw. 10. November 2011 zu Beginn der Übung.
