Mathematik 1 für Bauwesen
Übungsblatt 1

TECHNISCHE UNIVERSITÄT DARMSTADT

Fachbereich Mathematik
Dr. Ivan Izmestiev
Dr. Vince Bárány
M.Sc. Julia Plehnert

Wintersemester 2011/2012
22. Oktober 2011

Gruppenübungen

Aufgabe 1.1

Mit Hilfe der Formel

$$\sum_{i=0}^{n} q^i = \begin{cases} \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{für } q \neq 1 \\ n+1 & \text{für } q = 1 \end{cases}$$

berechnen Sie:

a) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{10}}$ (*Hinweis:* $2^{10} = 1024$)

b) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} - \cdots - \frac{1}{2^9} + \frac{1}{2^{10}}$ (*Hinweis:* $q = -\frac{1}{2}$ einsetzen)

Aufgabe 1.2

Welche der folgenden Mengen sind nach oben beschränkt?

a) $\{\sin x \mid x \in [0, 2\pi)\}$

b) $\{2^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$

c) $\{2^{-n} \mid n \in \mathbb{N}\}$

Aufgabe 1.3

Welche der folgenden Mengen besitzen ein größtes Element (Maximum)?

a) $\{1, \sqrt{2}, \pi\}$

b) $\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots\}$ (Übrigens, können Sie diese Menge ohne Auslassungspunkte beschreiben, als $\{\text{Formel} \mid n \in \mathbb{N}\}$?)

c) $(0, 1]$

Aufgabe 1.4

Beweisen Sie die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

durch vollständige Induktion.

Hausübungen

Aufgabe 1.5 — 4 Punkte

Berechnen Sie

$$\text{(a)} \quad \textstyle\sum_{k=0}^{5} 3^{-k} \qquad \text{(b)} \quad \textstyle\sum_{k=0}^{101} \frac{1}{2}(k-50)$$

und schreiben Sie das Ergebnis jeweils als gewöhnlicher Bruch m/n, mit $m, n \in \mathbb{Z}$.

Aufgabe 1.6 — 6 Punkte

Betrachten Sie die folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} M_1 &= \{\tfrac{n+7}{5-2n} \mid n \in \mathbb{N}\} \\ M_2 &= \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \\ M_3 &= \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 - 3 > 2\} \end{aligned}$$

a) Welche dieser Mengen sind nach oben beschränkt? Welche sind nach unten beschränkt? Begründen Sie Ihre Antwort.

b) Bestimmen Sie, falls vorhanden, jeweils Infimum und Supremum.
Liegen sie in der jeweiligen Menge?

Aufgabe 1.7 — 4 Punkte

Zeigen Sie für nichtnegative reelle Zahlen a, b die Ungleichung

$$\sqrt{ab} \leq \frac{1}{2}(a+b)\,.$$

Aufgabe 1.8 — 4 Punkte

Mit Hilfe der vollständiger Induktion zeigen Sie, dass die Menge

$$A = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

definiert durch

$$a_1 = 1$$
$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \text{ für alle } n \geq 1$$

nach oben und unten beschränkt ist. (*Hinweis:* Beweisen sie: $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $1 \leq a_n \leq 2$.)

Abgabetermin der Hausübungen: 2. bzw. 3. November 2011 zu Beginn der Übung.