Klausurvorbereitung Integrationstheorie

Fachbereich Mathematik
Miroslav Vržina

13. und 14. August 2012
Version: 16. August 2012

Erster Teil: Grundbegriffe der Maßtheorie und Messbarkeit von Funktionen

Dies war ein großer und wichtiger Teil der Vorlesung, den wir hier kurz stichpunktartig zusammenfassen und zu dem teilweise auch Fragen stellen, die man beantworten können sollte.

- Zentrale Begriffe: Halbring, Ring, σ-Algebra, Erzeugendensystem, Inhalt, (Prä)Maß.
- Wichtigstes Beispiel: Borel-σ-Algebra $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ wird erzeugt von den offenen Mengen, oder von den halboffenen Intervallen uvm.
- Beziehung zwischen Inhalten auf $\mathbb{R}$ und Verteilungsfunktionen. Die zu Verteilungsfunktionen assoziierten Inhalte heißen auch *Lebesgue-Stieltjes Inhalte* (siehe Abschnitt 2.16 der Vorlesung und H1 auf Übungsblatt 4, auch wenn dort dieser Begriff nicht benutzt wird).
- Konstruktion des Lebesgue-Maßes über Fortsetztungssätze: Zu einem Inhalt gibt es ein äußeres Maß (wie lautet es?). Fortsetzuns- und Eindeutigkeitssätze liefern unter bestimmten Voraussetzungen (welchen?) die Existenz und Eindeutigkeit des Lebesgue-Maßes, in dem man mit dem Lebesgue-Stieltjes Inhalt zur Verteilungsfunktion $F = \mathrm{id}$ startet.
- Wichtig: Was ist ein äußeres Maß? Wann heißt eine Menge messbar bezüglich eines äußeren Maßes?

  Vorstellung: Messbarkeit kann man sich so vorstellen, dass alle Mengen durch eine messbare Menge in zwei Teile zerlegt werden können.
- Vollständigkeit eines Maßraumes: Teilmengen von Nullmengen sind messbar; $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ ist nicht vollständig, Vervollständigung ist $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$, die σ-Algebra der Lebesgue-messbaren Mengen.
- Messbarkeit von Funktionen: Urbilder messbarer Mengen sind messbar. Es reicht aus dies auf Erzeugern einer σ-Algebra zu überprüfen.

Aufgabe A1 (Äußeres Maß und messbare Mengen)
Sei Ω eine nichtleere Menge. Betrachten Sie

$$\mu^*\colon \mathscr{P}(\Omega) \to \mathbb{R}, \qquad \mu^*(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A = \emptyset, \\ 1, & \text{falls } A \neq \emptyset. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass μ^* ein äußeres Maß definiert, und bestimmen Sie die μ^*-messbaren Mengen.

Aufgabe A2 (Maße)
Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sei eine Folge von Maßen auf Σ. Wir setzen voraus, dass für jedes $A \in \Sigma$ der Grenzwert $\lim_{k\to\infty} \mu_k(A)$ in $[0, \infty]$ existiert und bezeichnen den Grenzwert mit $\mu(A)$. Dadurch wird eine Funktion $\mu \colon \Sigma \to \mathbb{R}$ definiert.

(a) Zeigen Sie, dass μ ein Inhalt auf Σ ist.

(b) Zeigen Sie, dass μ nicht notwendigerweise ein Maß auf Σ ist. Gehen Sie dabei wie folgt vor: Betrachten Sie $\Omega = \mathbb{N}$ und $\Sigma = \mathscr{P}(\mathbb{N})$ sowie

$$\mu \colon \Sigma \to \mathbb{R}, \qquad \mu(A) := \begin{cases} 0, & \text{falls } A \text{ endlich ist,} \\ \infty, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(i) Geben Sie eine Folge von Maßen $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ auf Σ an mit $\lim_{k\to\infty} \mu_k(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \Sigma$.

(ii) Zeigen Sie, dass μ nicht σ-additiv ist.

Aufgabe A3 (Messbarkeit von Funktionen)
Wir betrachten die von der Menge $\mathscr{E} := \{\{1,2,3\},\{3,4\}\}$ erzeugte σ-Algebra $\Sigma := \sigma(\mathscr{E})$ auf der Menge $\Omega := \{1,2,3,4\}$. Entscheiden Sie, ob folgende Funktionen $f : (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar sind und begründen Sie Ihre Antwort:

(a) $f(x) := (x-3)^2$

(b) $f(x) := \left|x - \frac{3}{2}\right|$.

Zweiter Teil: Das Lebesgue-Integral, Konvergenzsätze und die L^p-Räume

Folgende Auswahl an Begriffen und Konzepten sollte man gut verstanden haben und die auftretenden Fragen beantworten können.

- Idee hinter Lebesgue-Integral: Unterteile den Wertebereich und nicht den Definitionsbereich. Daher auch der Begriff einer messbaren Abbildung: Urbilder messbarer Mengen sind messbar.

- Definition des Lebesgue-Integrals:
  1. Zunächst für einfache Funktionen (d.h. für Treppenfunktionen).
  2. Definition dann für nicht-negative messbare Funktionen durch Supremum von Integralen einfacher Funktionen.
  3. Für allgemeine Funktion: Zerlegung in Real- und Imaginärteil und diese separat in Positiv- und Negativteil zerlegen.

- Charakterisierung: Eine messbare Abbildung $f : (\Omega, \Sigma) \to \mathbb{C}$ ist Lebesgue-integrierbar genau dann, wenn $\int_\Omega |f| < \infty$.

  Wichtig: Es gibt stetige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $\int_{-\infty}^{\infty} f \, dx < \infty$ (Riemann-Integral) und $\int_{\mathbb{R}} |f| \, d\lambda = \infty$. In diesem Sinne sind Lebesgue-integrierbare Funktionen „absolut integrierbar“.

- Vorteil: Vertauschbarkeit von Integral und Grenzwert bei Folgen von messbaren Funktionen ist leichter zu haben.

  Konvergenzsätze: Lemma von Fatou, Satz von Beppo Levi und der Satz von der majorisierten Konvergenz.

- Wichtige Beweisstrategie, die man beherrschen sollte:
  1. Beweise eine Aussage für einfache Funktionen.
  2. Beweise Aussage für nicht-negative messbare Funktionen: Approximiere Funktionen durch monoton wachsende Folge einfacher Funktionen und wende Satz von Beppo Levi an.
  3. Zerlege in Positiv- und Negativteil (evtl. vorher in Real- und Imaginärteil).

  Beispiel: G4 auf Übungsblatt 9 oder der hier vorgestellte Beweis für Aufgabe A5.

- $\mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$: Wie hängen die Räume zusammen? Warum ist $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein normierter Vektorraum? Was ist an $L^2(\Omega, \Sigma, \mu)$ besonders? Was sind Beispiele für Funktionen in $\mathscr{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$?

- Wichtige funktionalanalytische Eigenschaften der L^p-Räume: Vollständigkeit, stetige Funktionen mit kompakten Träger liegen dicht.

Aufgabe A4 (Testfragen)

(a) Entscheiden Sie für die folgenden Funktionen, ob sie messbar sind, ihr Integral auf $\mathbb{R}$ definiert ist oder sie sogar integrierbar sind (d.h. in $\mathscr{L}^1(\mathbb{R})$ liegen).

	messbar	definiert	integrierbar
$x \mapsto 17$			
$x \mapsto \lvert x \rvert$			
$x \mapsto \sin(x)$			
$x \mapsto \chi_{[0,\infty[} \cdot \exp(-x)$			

(b) Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Dabei sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

☐ Sind $f, g : \Omega \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar und $f = g$ gilt μ-fast überall, so ist auch $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$.

☐ Zwei messbare Funktionen $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stimmen auf einer dichten Teilmenge von $\mathbb{R}$ überein. Dann ist $\int_\mathbb{R} f \, d\lambda = \int_\mathbb{R} g \, d\lambda$.

☐ Seien $f, g : (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar und $\int_\Omega f \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu$. Dann gilt $f = g$ fast überall.

☐ Seien $f, g : (\Omega, \Sigma) \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ messbar mit $\int_\Omega |f - g| \, d\mu = 0$. Dann ist $f = g$ fast überall.

☐ Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig, so ist $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R})$.

☐ Sei $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Dann ist $\sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$ auch in $\mathscr{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Aufgabe A5 (Integration bezüglich des Dirac-Maßes)
Sei Ω eine nichtleere Menge und $x \in \Omega$. Weiterhin sei $\delta_x : \mathscr{P}(\Omega) \to [0, \infty]$ das Dirac-Maß im Punkt x auf Ω. Zeigen Sie: Für jede Funktion $f : (\Omega, \mathscr{P}(\Omega)) \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt

$$\int_\Omega f \, d\delta_x = f(x).$$

Aufgabe A6 (Vollständigkeit)
Betrachten Sie die Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}, \qquad f_n(x) := \begin{cases} -1 & \text{für } x \in [-1, -1/n], \\ nx & \text{für } x \in [-1/n, 1/n], \\ 1 & \text{für } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $(L^1([-1,1]), \|\cdot\|_1)$ repräsentiert.

(b) Warum hat $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen $\|\cdot\|_1$-Grenzwert in $L^1([-1,1])$? Geben Sie einen Repräsentanten des Grenzwertes an und begründen Sie Ihre Wahl.

(c) Entscheiden Sie: Hat der Grenzwert aus (b) auch einen stetigen Repräsentanten? Sie brauchen Ihre Antwort nicht zu begründen.

Dritter Teil: Fubini, Transformationssatz und Integration auf Untermannigfaltigkeiten

Wichtiges Problem: Man möchte gerne auch konkrete Integrale von Funktionen berechnen, nicht nur über Quadern.

- Der Satz von Fubini-Tonelli gestattet unter bestimmten Voraussetzungen (welchen?) die Vertauschung der Integrationsreihenfolge. Dies ist sehr nützlich.
- Das Lebesgue-Maß von Quadern kann leicht bestimmt werden und mit dem Satz von Fubini-Tonelli können auch Integrale von Funktionen über Quadern (manchmal) berechnet werden.
- Das Lebesgue-Maß von Mengen, die nicht Quader sind, zum Beispiel Kugeln, Ellipsoide etc. ist da etwas komplizierter. Der Transformationssatz vereinfacht dieses Problem: Seien $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $\varphi : U \to V$ ein $\mathscr{C}^1$-Diffeomorphismus. Dann gilt:
  (i) Ist $A \subseteq U$ messbar, dann ist $\varphi(A)$ messbar und
  $$\lambda(\varphi(A)) = \int_A \left|\det(d\varphi(x))\right| \, d\lambda^n(x).$$
  (ii) Für $f : V \to [0, \infty[$ messbar ist
  $$\int_V f(y)\, d\lambda^n(y) = \int_U f \circ \varphi \cdot |\det(d\varphi(x))| \, d\lambda^n(x).$$

(iii) Ist $f : V \to (\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ eine messbare Abbildung, dann ist $f \in L^1(V, \lambda)$ genau dann, wenn $f \circ \varphi \cdot |\det(d\varphi)| \in L^1(U, \lambda)$ ist. In diesem Fall stimmen die Integrale überein.

- Für Mengen von kleinerer Dimension ist das nicht hilfreich: Wir brauchen einen vernünftigen Begriff zur Integration auf Untermannigfaltigkeiten.
- Untermannigfaltigkeiten charakterisiert durch
  a) lokale Begradigung,
  b) lokal das Bild einer Einbettung,
  c) lokal eine Niveaumenge,
  d) lokal ein Graph über einer offenen Menge.
- Begriff: Die lokalen Einbettungen heißen auch Karten.
- Integral bezüglich einer Karte ist sinnvoll definiert:

$$\int_A f \, d\sigma_M := \int_{\varphi^{-1}(A)} f \circ \varphi \cdot \sqrt{\det(g_\varphi)} \, d\lambda^d.$$

Aufgabe A7 (Volumenbestimmung)
Es sei A eine invertierbare reelle 2×2-Matrix und $K := \{x \in \mathbb{R}^2 : \|Ax\|_2 \leq 1\}$. Bestimmen Sie

$$\int_K \|Ax\|_2^2 \, d\lambda^2(x).$$

Aufgabe A8 (Immersion oder Einbettung)
Stellen Sie bei den folgenden Abbildungen fest, ob es sich um Immersionen bzw. Einbettungen handelt:

(a) $\varphi :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\sin(t), \sin(2t))$.

(b) $\varphi :]-1, 1[\times]0, 1[\to \mathbb{R}^3$, $\varphi(s,t) := (ts, ts^2, t^2s^3)$.

(c) $\varphi :]0, 2\pi[\to \mathbb{R}^2$, $\varphi(t) := (\sin(t), \cos(t))$.

Aufgabe A9 (Integration auf Untermannigfaltigkeiten)
Für $r > 0$ sei θ_r die Homothetie

$$\theta_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad x \mapsto rx.$$

Weiter sei $M \subseteq \mathbb{R}^n$ eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit. Zeigen Sie folgende Aussagen:

(a) Die Menge $\theta_r(M)$ ist ebenfalls eine d-dimensionale Untermannigfaltigkeit.

(b) Eine Funktion $f : \theta_r(M) \to \mathbb{R}$ ist genau dann über $\theta_r(M)$ integrierbar, wenn die Funktion $f \circ \theta_r$ über M integrierbar ist und in diesem Fall gilt

$$\int_{\theta_r(M)} f \, d\sigma_{\theta_r(M)} = \int_M f \circ \theta_r \, r^d \, d\sigma_M.$$

Vierter Teil: Aufgaben zum Gaußschen Integralsatz des 14. Übungsblattes

Was sollte man alles bezüglich dieses Themengebietes wissen oder verstanden haben?

- Eine Menge $K \subseteq \mathbb{R}^n$ heißt *Kompaktum mit glattem Rand*, wenn K kompakt ist und für jedes $a \in \partial K$ eine offene Umgebung von a sowie eine $\mathscr{C}^1$-Funktion $\psi : U \to \mathbb{R}$ existieren, so dass gilt
  a) $K \cap U = \{x \in U : \psi(x) \leq 0\}$
  b) $\nabla\psi(x) \neq 0$ für alle $x \in K \cap U$.

  Der Rand von K ist eine $(n-1)$-dimensionale Untermannigfaltigkeit und lokal ist das *äussere Einheitsnormalenfeld* durch den normierten Gradienten von ψ gegeben („Gradient steht senkrecht auf den Höhenlinien").
- Die Divergenz eines Vektorfeldes: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathscr{C}^1$-Vektorfeld. Man nennt
  $$\operatorname{div}(F)(x) := \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j} F(x), \qquad x \in \Omega,$$
  die *Divergenz von F*.

  Interpretiert man F als Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit, so gibt $\operatorname{div}(F)(x)$ gerade die Quelldichte im Punkt x an, was wir in Aufgabe A12 begründen.
- Beispiele für Divergenz: Für $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto x$ gilt $\operatorname{div}(F) \equiv n$. In jedem Punkt ist also eine Quelle. Das Vektorfeld $\tilde{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (-y, x)$ ist dagegen divergenzfrei: In jedem Punkt fließt genauso viel Wasser herein, wie auch raus fließt.
- *Divergenzsatz*: Sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $F : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ein $\mathscr{C}^1$-Vektorfeld. Weiter sei $K \subseteq \Omega$ ein Kompaktum mit glattem Rand und äußerem Einheitsnormalenfeld $\nu : \partial K \to \mathbb{R}^n$. Dann gilt
  $$\int_K \operatorname{div}(F)\, d\lambda^n = \int_{\partial K} \langle F, \nu\rangle \, d\sigma_{\partial K}.$$
  Interpretation: Ist F Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit, so ist der gesamte Fluss durch K gleich dem Fluss durch den Rand.

Aufgabe A10 (Kompakta mit glattem Rand)
Beweisen oder widerlegen Sie:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Dann ist $K := [a, b]$ ein Kompaktum mit glattem Rand.
(b) Die Menge $K := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leq 1\}$ ist ein Kompaktum mit glattem Rand.

Aufgabe A11 (Einfache Beispiele zum Gaußschen Integralsatz)
(a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ und sei $K^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq 1\}$. Betrachten Sie ferner das Vektorfeld
$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \qquad F(x) := x.$$
Wenden Sie den Gaußschen Integralsatzes auf K^n und F an um folgende Gleichung zu zeigen:
$$\lambda^n(K) = \frac{1}{n}\sigma_{\mathbb{S}^{n-1}}(\mathbb{S}^{n-1}).$$

(b) Überlegen Sie sich, dass der Gaußsche Integralsatz für Dimension $n = 1$ gerade den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung ergibt.
Hinweis: Aufgabe A10 (a).

(c) Sei $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $u \in \mathscr{C}^1(K, \mathbb{R})$. Dann gilt

$$\int_K \operatorname{grad}(u)\, d\lambda^n = \int_{\partial K} u \cdot \nu\, d\sigma_{\partial K}.$$

Dabei ist diese Gleichung komponentenweise zu verstehen, d.h.

$$\int_K \partial_j u\, d\lambda^n = \int_{\partial K} u \cdot \nu_j\, d\sigma_{\partial K}, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Folgern Sie $\int_{\partial K} \nu\, d\sigma_{\partial K} = 0$.

Aufgabe A12 (Divergenz als Flussdichte)
In dieser Aufgabe wollen wir mathematisch präzise verstehen, wieso die Divergenz als Flussdichte betrachtet werden kann.
Es sei $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld und $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Für $r > 0$ bezeichne $K_r := \overline{K_r(x_0)}$ die abgeschlossene Kugel vom Radius r um x_0. Wir betrachten den sogenannten *Fluss*

$$\int_{\partial K_r} \langle F, \nu \rangle\, d\sigma_{\partial K_r}$$

von F durch die Sphäre ∂K_r vom Radius r um x_0, wobei $\nu: \partial K_r \to \mathbb{R}^n$ jeweils das äußere Normalenfeld von ∂K_r bezeichnet.
Zeigen Sie mit dem Gaußschen Integralsatz, dass folgende Gleichung gilt:

$$\operatorname{div}(F)(x_0) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\lambda^n(K_r)} \int_{\partial K_r} \langle F, \nu \rangle\, d\sigma_{\partial K_r}.$$

Hinweis: Schreiben Sie $\operatorname{div}(F)(x_0) = \frac{1}{\lambda^n(K_r)} \int_{K_r} \operatorname{div}(F)(x_0)\, d\lambda^n$.

Aufgabe A13 (Volumenberechnung)
Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Kompaktum mit glattem Rand und $h \in]0, \infty[$. Wir betrachten nun einen Kegel der Höhe h über B mit Spitze in $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, d.h. wir schauen uns folgende Menge an:

$$K := \left\{ (tx, -ht) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in B \text{ und } t \in [0,1] \right\}.$$

Berechnen Sie $\lambda^{n+1}(K)$ auf zwei Weisen:

(a) Mit dem Prinzip von Cavalieri (siehe Aufgabe G1 auf Übungsblatt 11).

(b) Mit dem Gaußschen Integralsatz, welchen Sie hier ohne weitere Diskussion benutzen dürfen, auch wenn ∂K nicht glatt ist – bis auf eine „Nullmenge" ist ∂K glatt und in solchen Situationen gilt der Integralsatz von Gauß ebenfalls.
Hinweis: Die Vorgehensweise aus Aufgabe A11 (a) ist hier nützlich.

Fragen aus dem Formular

Hier sind Erläuterungen zu einigen der Fragen bzw. Kommentare, die mir mitgeteilt wurden.

Wahrscheinlichkeitsmaße

Hier wurde nur der Punkt Wahrscheinlichkeitsmaße genannt, so dass ich hier nicht viel sagen kann. Vielleicht fangen wir wie folgt an: In der Wahrscheinlichkeitstheorie wird zunächst zwischen diskreten und kontinuierlichen Modellen unterschieden. Im Wesentlichen bedeutet dies: Man schaut sich endliche, abzählbare unendliche Mengen oder die reellen Zahlen als Ω an.
Sei Ω abzählbar, o.B.d.A. $\Omega = \mathbb{N}$. Dann kann man alle Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ leicht charakterisieren:
Eine Abbildung $\mu\colon \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ ist genau dann ein Wahrscheinlichkeitsmaß, wenn es eine Folge nicht-negativer reeller Zahlen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt, so dass $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$ ist und es gilt

$$\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \delta_n.$$

Hat μ die Form $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n\delta_n$ mit $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$, so rechnet man einfach die Axiome eines Maßes nach. Ist umgekehrt μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathscr{P}(\mathbb{N})$, dann setzen wir $p_n := \mu(\{n\})$ und die Richtung folgt ebenfalls.
Wahrscheinlichkeitsmaße auf nicht abzählbaren Mengen erhält man nicht immer so einfach. Maße mit Dichten sind eine Möglichkeit (und die kontinuierliche Verallgemeinerung dieser diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße), aber es gibt noch mehr. Zum Beispiel erlaubt der Konsistenzsatz von Kolmogorov die Konstruktion von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf Folgenräumen.

Maß der Cantor-Menge

Dies war Gegenstand von Aufgabe G3 auf Übungsblatt 5. Vielleicht war die Lösung etwas knapp. Dabei konstruieren wir die Cantor-Menge $\mathscr{C}$ gemäß des Lösungshinweises.
Behauptung: $\lambda(\mathscr{C}_n) = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
Eine Möglichkeit ist durch Induktion: Für $n = 0$ ist dies klar. Sei es wahr für ein $n \in \mathbb{N}$. Die Menge $\mathscr{C}_{n+1}$ entsteht aus $\mathscr{C}_n$ durch Entfernen von 2^n offenen Intervallen der Länge $\frac{1}{3^{n+1}}$. Somit folgt

$$\lambda(\mathscr{C}_{n+1}) = \lambda(\mathscr{C}_n) - 2^n\frac{1}{3^{n+1}} = \frac{2^n}{3^n} - \frac{2^n}{3^{n+1}} = \frac{3\cdot 2^n - 2^n}{3^{n+1}} = \frac{2^{n+1}}{3^{n+1}}.$$

Absolutstetigkeit des Maßes mit Dichte

Sei (Ω,Σ,μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to [0,\infty]$ eine messbare Funktion. In der Übung haben wir

$$\nu_f : \Sigma \to \mathbb{R}, \quad \nu_f(A) := \int_A f(x)\, d\mu(x)$$

das Maß mit Dichte f genannt (Aufgabe G2 auf Übungsblatt 8).
Allgemein nennt man ein Maß ν absolut stetig bezüglich μ, wenn jede Nullmenge bezüglich μ auch eine Nullmenge bezüglich ν ist. Da fragt man sich, was das mit „Stetigkeit“ zu tun hat.

Die Anschauung zu diesem Begriff liefert Aufgabe H2 auf Übungsblatt 8: Setzen wir zusätzlich $\int_\Omega f\, d\mu < \infty$ voraus (es reicht auch aus zu fordern, dass (Ω, Σ, μ) ein σ-endlicher Maßraum ist), so sind Mengen von „kleinem“ Maß bezüglich μ auch Mengen mit vorgegebenem „kleinem“ Maß bezüglich ν.

Konsistente Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Wie kann man sich konsistente Familien von Wahrscheinlichkeitsmaßen vorstellen? Eine gute Frage, bei der man vielleicht etwas ausholen muss. Oben wurde ja schon gesagt: Auf abzählbaren Mengen sind Wahrscheinlichkeitsmaße leicht zu kriegen.
Was ist jedoch mit Folgenräumen? Diese tauchen ganz natürlich auf: Sei z.B. $\Omega_0 := \{K, Z\}$, $\Omega_n := \prod_{j=0}^n \Omega_0$ und schließlich $\Omega := \prod_{n\in\mathbb{N}} \Omega_0$ die Menge aller Folgen mit Einträgen K („Kopf“) oder Z („Zahl“). Diese Menge beschreibt alle möglichen Elemente, die bei einem beliebig oft durchgeführten Münzwurf auftreten können. Doch wie kann man darauf ein sinnvolles Wahrscheinlichkeitsmaß μ erhalten, welches gleichzeitig diesen unendlichen Münzwurf modelliert?
Da kommt der Konsistenzsatz von Kolmogorov ins Spiel. Von solch einem Wahrscheinlichkeitsmaß erwartet man, dass bei Forderung von endlich vielen Ereignissen, d.h. auf einer Zylindermenge

$$\{(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}} \colon \omega_{i_1} = j_1, \ldots, \omega_{i_k} = j_k\},$$

das Maß dieser Zylindermenge bezüglich μ mit dem natürlichen Maß des Ereignisses $\{j_1, \ldots, j_k\}$ für den Münzwurf auf Ω_{k-1} übereinstimmt.
In Aufgabe H5, Abschnitt „Der Münzwurf“, ist dies auch nochmal mit den Details zu finden.

Bilder von Nullmengen

Zu dem Stichpunkt weiß ich nicht genau, was ich sagen soll. Ich fasse mich kurz: Im Beweis des Transformationssatzes ist wichtig zu wissen, dass unter $\mathscr{C}^1$-Abbildungen Bilder von Nullmengen wieder Nullmengen sind. Damit hängt auch die Frage zusammen, ob denn das Bild einer messbaren Menge wieder eine messbare Menge ist.

Alte Klausuren

Da kann ich leider nicht helfen. Eventuell muss man im LZM schauen, ob dort welche sind.

Umfang der Veranstaltung

Bei einer Veranstaltung mit 9 CP wird erwartet, dass Studierende für die gesamte Veranstaltung (inklusive Klausur, Nachbereitung der Vorlesung, Bearbeitung der Übungen) 270 Zeitstunden investieren. Es gab insgesamt 25 Vorlesungen und 13 Übungsblätter (davon 12 mit Hausaufgaben). 25 Vorlesungen entsprechen 37.5 Zeitstunden, der Besuch von 13 Übungsgruppen entspricht 19.5 Zeitstunden und die Klausur dauert 2 Zeitstunden, so dass sicherlich insgesamt 59 Zeitstunden von jedem investiert wurden. Damit sind noch 211 Zeitstunden zu verteilen: Rechnen wir im Schnitt mit 10 Stunden pro Vorlesungswoche für Bearbeitung der Hausaufgaben oder Nachbereitung der Vorlesung, so kommen wir auf 140 Zeitstunden. Damit bleiben noch 71 Stunden für die Klausurvorbereitung.
Dies mag individuell unterschiedlich sein und die Veranstaltung als Ganzes ist sicherlich als anspruchsvoll einzuordnen (und einige Aufgaben waren auch schwer, haben aber auch Einblicke in verwandte Themengebiete gegeben), aber bei disziplinierter Arbeitsweise sollte man es bewältigen können. Das Studium ist nun mal auch Arbeit.

Schwierigkeitsgrad der Aufgaben

Vielleicht ein wenig kurzfristig vor der Klausur, aber hier noch meine Einschätzung zum Schwierigkeitsgrad der Aufgaben aus der Klausurvorbereitung:

A1: Leicht, geht eher um die Abfrage der Definitionen an einem einfachen Beispiel.

A2: Leicht, geht auch eher um die Abfrage der Definitionen an einem einfachen Beispiel.

A3: Mittel, fragt Definitionen und Sätze zur Messbarkeit von Funktionen und der Borel-σ-Algebra ab und man muss die richtigen Erzeuger auswählen, um die über die Messbarkeit zu entscheiden.

A4: Eher leicht, man muss sicher mit den Begriffen des Lebesgue-Integrals umgehen können.

A5: Dies war leicht bis mittel.

A6: War mal als Klausuraufgabe gedacht und dort hätte man noch in (c) seine Antwort begründen müssen. In der Form ist sie leicht bis mittel schwer.

A7: Ist eine einfache Variante einer Klausuraufgabe bei Herrn Hieber. Man kann sie als mittel einstufen, jedoch mit zwei Anwendungen des Transformationssatzes zu umfangreich.

A8: Leicht bis mittel: Man muss die Begriffe verstanden haben.

A9: Mittel, hätte man so auch als Klausuraufgabe stellen können.

A10: Leicht bis mittel.

A11: (a) ist leicht, (b) leicht bis mittel und (c) mittel.

A12: Schwer, in einer Klausur höchstens mit Aufgabenteilen.

A13: (a) ist mittel bis schwer, aber zu umfangreich. (b) ist mittel bis schwer, in einer Klausur höchstens mit Aufgabenteilen.