Martin Otto
Vince Barany
Sommer 2012

Übung Nr.6

Übung 1 [Aufzählbarkeit und Entscheidbarkeit]
Für die folgenden Betrachtungen kann man mit einem intuitiven Begriff der Berechenbarkeit argumentieren.

(a) $S \subseteq \mathbb{N}$ ist entscheidbar gdw. sowohl S als auch sein Komplement $\mathbb{N} \setminus S$ aufzählbar sind.

(b) Sind der Durchschnitt/die Vereinigung zweier aufzählbarer Mengen stets aufzählbar?

(c) Was kann man über den Durchschnitt einer entscheidbaren und einer aufzählbaren Menge sagen?

Übung 2 [zum Nachdenken über Reduktionen]
Die Unentscheidbarkeit des Halteproblems ist die Quelle aller konkreten Unentscheidbarkeitsresultate. Überlegen Sie sich Reduktionsansätze, wie man zu folgenden logischen Unentscheidbarkeitsresultaten kommen könnte:

(a) Unentscheidbarkeit der FO-Arithmetik über $\mathbb{N}$ (Tarski).

(b) Unentscheidbarkeit der im endlichen allgemeingültigen FO-Sätze (Trakhtenbrot).

(c) Unentscheidbarkeit der Graphentheorie (Tarski, Mostowski, Robinson).

Übung 3 [zum Nachdenken über Berechenbarkeit]

(a) Vergewissern Sie sich (skizzenhaft) für eine arithmetische Funktion Ihrer Wahl dass sie berechenbar ist.

(b) Wie kann es sein, dass die FO-Theorie der Arithmetik über $\mathbb{N}$ unentscheidbar, die FO-Theorie der Arithmetik über $\mathbb{R}$ aber entscheidbar ist (wo doch $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{R}$ die induzierten arithmetischen Operationen trägt)?

(c) Diskutieren Sie mögliche Begriffe der "Berechenbarkeit einer reellen Zahl" und Gründe, warum es nicht-berechenbare reelle Zahlen geben muss. Wie kann man ein Beispiel finden (und warum ist z.B. π keines) ?

Übung 4 [zum Nachdenken über Diagonalisierung]

(a) Vergleichen sie strukturell die Beweisideen zur Überabzählbarkeit von $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ (Cantor) und zur Unentscheidbarkeit des Halteproblems.

(b) Wie steht es mit der kleinsten natürlichen Zahl, die sich nicht in weniger als hundert Worten eindeutig definieren lässt?