Logik und Grundlagen

Martin Otto
Vince Barany
Sommer 2012

Übung Nr.5

Übung 1 [Wohlordnungen und Ordinalzahlen]
Erinnerung: eine Menge α heisst Ordinalzahl falls sie transitiv ist (d.h. $\forall x(x \in \alpha \to x \subseteq \alpha)$, Elemente von Elementen sind Elemente) und durch $\in$ wohlgeordnet wird.

(a) Zum Aufwärmen: Zeigen Sie für lineare Ordnungen $(A, <)$ die Äquivalenz von
  (i) jede nicht-leere Teilmenge von A hat bezüglich $<$ ein minimales Element.
  (ii) es gibt in $(A, <)$ keine unendlich absteigenden Folgen.

(b) Zeigen Sie, dass der Durchschnitt zweier Ordinalzahlen α, β ordnungstheoretisch stets ein Anfangsabschnitt von beiden ist, und nicht echter Anfangsabschnitt von beiden sein kann (d.h., es gilt $\alpha \subseteq \beta$ oder $\beta \subseteq \alpha$, und sogar $\alpha = \beta$ oder $\alpha \in \beta$ oder $\beta \in \alpha$).

(c) Zeigen Sie, dass die Klasse der Ordinalzahlen abgeschlossen ist unter der Nachfolgeroperation $\alpha \mapsto S(\alpha) := \alpha \cup \{\alpha\}$; und dass die Vereinigung über eine Menge von Ordinalzahlen stets eine Ordinalzahl ist.

(d) Zeigen Sie, dass die Klasse aller Ordinalzahlen keine Menge ist (für diesen Satz von Burali–Forti braucht man weder (AC) noch Fundiertheit).

(e) Zeigen Sie, dass eine Wohlordnung keine nicht-trivialen Ordnungs-Automorphismen haben kann. Zeigen Sie ebenso, dass jede Wohlordnung zu höchstens einer (in Wahrheit auch: genau einer) Ordinalzahl isomorph ist. Schließen Sie hieraus, dass diejenigen Ordinalzahlen, die sich in eine gegebene Menge injektiv abbilden lassen, stets eine Menge bilden (Satz von Hartogs).

Übung 2 [Kardinalitäten]

(a) Geben Sie eine Injektion (Bijektion) von $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$ an, und schließen Sie, dass die Vereinigung einer abzählbaren Menge abzählbarer Mengen stets abzählbar ist.

(b) Zeigen Sie, dass für jede Menge M die Mächtigkeit der Potenzmenge strikt größer sein muss als die der Menge selbst. D.h., es gibt keine surjektive Abbildung von M auf $\mathcal{P}(M)$. Hinweis: Für $f\colon M \to \mathcal{P}(M)$ ist stets $\{m\colon m \notin f(m)\} \notin \mathrm{Bild}(f)$ (vgl. Russell).

(c) Wie kann man nachweisen, dass die Menge der reellen Zahlen überabzählbar ist?

Übung 3 [Auswahlaxiom]
Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Varianten des Auswahlaxioms (eigentlich in ZF, hier aber einfach im Sinne allgemeiner mathematischer Praxis):

(i) (AC) Zu jeder Menge von disjunkten, nicht-leeren Mengen existiert eine Auswahlmenge.

(ii) (Wohlordnungssatz) Jede Menge lässt sich wohlordnen, d.h. über jeder (nicht-leeren) Menge A existiert eine zweistellige Relation $<$ derart dass $(A, <)$ eine Wohlordnung ist.

(iii) (Zornsches Lemma) Jede partielle Ordnung (Halbordnung), in der jede linear geordnete Teilmenge eine obere Schranke besitzt, hat maximale Elemente.

Hinweise: (ii) $\Rightarrow$ (i) ist leicht. Für (iii) $\Rightarrow$ (ii) kann man zu gegebenem A das Zornsche Lemma anwenden auf die Menge aller Wohlordungen von Teilmengen von A in $\mathcal{P}(A \times A)$. Für (i) $\Rightarrow$ (iii) nehme man indirekt an, dass eine induktive Halbordnung $(A, \prec)$ keine maximalen Elemente besitzt; dann könnte man aber mit (AC) in $(A, \prec)$ eine Teilmenge $A_0 \subseteq A$ gewinnen, die durch $\prec$ isomorph zur Klasse (!) der Ordinalzahlen angeordnet wäre (für diese spannendste Implikation reicht hier auch eine etwas informellere Beweisskizze).

Übung 4 [Extra: Skolemsches Paradoxon]
In der mathematischen Logik beweist man im Zusammenhang mit dem Gödelschen Vollständigkeitssatz i.d.R. gleich mit, dass jede konsistente und höchstens abzählbar unendliche FO-Satzmenge ein höchstens abzählbar unendliches Modell hat.
In Anwendung auf ZFC besagt dies, dass es ein Modell geben müsste, in dem z.B. die Potenzmenge von ω oder auch die interne Menge der reellen Zahlen noch abzählbar sind. Andererseits folgt aus ZFC dass diese Mengen nicht abzählbar sind. Warum ist dies *kein* Hinweis auf eine Inkonsistenz von ZFC?