Logik und Grundlagen

Martin Otto
Vince Barany
Sommer 2012

Übung Nr.4

Übung 1 [Peano-Axiome und Satz von Dedekind]

(a) Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen (zum Induktionsprinzip) für eine σ_P-Struktur $\mathfrak{A} = (A, S, 0)$, mit injektiver Funktion $S\colon A \to A$ und Konstante $0 \notin \text{Bild}(S)$:

(i) (P3) Ist $0 \in A_0 \subseteq A$ und A_0 abgeschlossen unter S, so folgt $A_0 = A$.

(ii) (Prinzip der vollständigen Induktion) Für jede Aussage $\alpha(x)$ über Elemente von A gilt: wenn $\alpha[0]$ wahr ist und für jedes $a \in A$ aus $\alpha[a]$ auch $\alpha[S(a)]$ folgt, so gilt $\alpha[a]$ für alle $a \in A$.

(b) Beweisen Sie den Satz von Dedekind: Zu je zwei Peano-Strukturen $\mathfrak{A} = (A, S, 0)$ und $\mathfrak{A}' = (A', S', 0')$ (d.h. σ_P-Strukturen, die die Axiome (P1), (P2) und (P3) erfüllen) gibt es einen (sogar eindeutig bestimmten) Isomorphismus $\rho\colon \mathfrak{A} \simeq \mathfrak{A}'$.

Übung 2 [einfache Mengenkonstrukte]

(a) (geordnete Paare)

(i) Was erwartet man mathematisch von einer Modellierung geordneter Paare als (zu definierender) Mengenoperation $x, y \mapsto (x, y)$? Formalisieren Sie die Ansprüche abstrakt an eine definierende Formel $\varphi(x, y, z) \in \text{FO}(\{\in\})$, die für je drei Mengen x, y, z genau dann zutrifft wenn "z das geordnete Paar (x, y) kodiert".

(ii) Warum sind $x, y \mapsto \{x, y\}$ bzw. auch $x, y \mapsto \{\{x\}, y\}$ nicht geeignet?

(iii) Prüfen Sie nach, dass $x, y \mapsto \{\{x\}, \{x, y\}\}$ geeignet ist.
Geben Sie eine Formel $\varphi(x, y, z) \in \text{FO}(\{\in\})$ an, die in obigem Sinne diese Paarbildung nach Kuratowski erfasst.

(b) Wann ist eine Menge z der Graph einer Funktion von x nach y?
Geben Sie eine Formel $\varphi(x, y, z) \in \text{FO}(\{\in\})$ an, die dies intern beschreibt.

(c) Wann ist eine Menge y eine zweistellige Relation über der (nicht-leeren) Menge x?

(d) Wann ist eine Menge z eine $\{<\}$-Struktur, die eine lineare Ordnung (eine unendliche Wohlordnung, eine dichte offene Ordnung) ist?

(e) Wie könnte man intern den (mathematisch wahren) Sachverhalt ausdrücken, dass je zwei abzählbare dichte offene lineare Ordnungen isomorph sind? Was bedeutet im Sinne von 'Mathematik im Rahmen von ZFC' also die Gültigkeit dieses Satzes von Cantor?

Übung 3 [von Neumannsches $\mathbb{N}$ und interner Satz von Dedekind]
Argumentieren Sie in ZFC dass

(a) es eine eindeutige $\subseteq$-minimale induktive Menge ω gibt;

(b) diese Menge ω die Trägermenge einer Peano-Struktur ist, wenn man 0 als $\emptyset$ interpretiert und die Operation $x \mapsto x \cup \{x\}$ über ω als Interpretation der Nachfolgerfunktion S wählt (das von Neumannsche Modell der natürlichen Zahlen).

(c) Extra: Formalisieren Sie ZFC-intern die Aussage dass eine Peano-Struktur existiert sowie den 'internen Satz von Dedekind'.

Übung 4 [Modellierung in ZFC: Endlichkeit]
Diskutieren Sie den internen Begriff 'endliche Menge' anhand der üblichen mathematischen Praxis/Intuition. Geben Sie insbesondere eine FO($\in$)-Formel $\varphi(x)$ an, die im Rahmen eines ZFC-Modells wiedergibt, dass x eine endliche Menge ist.
Muss für ein ZFC-Modell $\mathfrak{V} = (V, \in)$ und $m \in V$ mit $\mathfrak{V} \models \varphi[m]$ stets gelten, dass die Menge m von außen betrachtet, $[\![m]\!]^{\mathfrak{V}} := \{v \in V : v \in^{\mathfrak{V}} m\}$, endlich ist?
Extra: Skizzieren Sie grob eine interne Formalisierung von Königs Lemma (jeder unendliche, endlich verzweigte Baum besitzt einen unendlichen Pfad), indem Sie die interne Fassung der relevanten Konzepte (Baum, unendlicher Baum, endliche Verzweigtheit, unendlicher Pfad) grob erläutern, auch ohne sie explizit zu formalisieren.