Übung Nr.3

Übung 1 [Vollständigkeit und Kompaktheit]
Zum Aufwärmen: Beweisen Sie den Kompaktheitssatz für FO aus dem Gödelschen Vollständigkeitssatz. Bemerkung: Es gibt auch rein algebraisch-modelltheoretische Beweise der Kompaktheitseigenschaft für *FO* (Modellkonstruktion über Ultraprodukte).

Übung 2 [FO Formalisierungen]
Geben Sie FO-Formeln an, die die folgenden Eigenschaften erfassen.

(a) Die 2-stellige Relation $<$ ist eine dichte offene lineare Ordnung, die einstellige Relation P eine dichte offene Teilmenge bzgl. dieser Ordnung.

(b) Über der um ein zusätzliches 1-stelliges Funktionssymbol f erweiterten Standard-Struktur $\mathfrak{R} := (\mathbb{R}, +, \cdot, <, 0, 1)$: f ist eine monotone Funktion und
  (i) f wächst für $x \to \infty$ unbeschränkt; bzw.
  (ii) f hat für $x \to \infty$ den Grenzwert $\sqrt{2}$.

(c) Für die Signatur der Booleschen Algebren, $\sigma = \{+, \cdot, ', 0, 1\}$, die Eigenschaft eines Elements in einer σ-Struktur, ein Atom in einer Booleschen Algebra zu sein.

Übung 3 [Grenzen der Ausdrucksstärke von FO]
Zeigen sie durch Anwendung des Kompaktheitssatzes dass die folgenden Strukturklassen nicht durch FO-Satzmengen axiomatisierbar (nicht Δ-elementar) bzw. nicht durch endliche FO-Satzmengen oder einen einzelnen Satz axiomatisierbar (nicht elementar) sind.

(i) Die Klasse der zusammenhängenden Graphen $\mathfrak{A} = (A, E^{\mathfrak{A}})$ zur Symbolmenge $\sigma = \{E\}$ mit einem 2-stelligen Relationssymbol E für die Kantenrelation.
(Ein Graph heisst zusammenhängend wenn je zwei verschiedene Knoten durch einen Kantenzug verbunden sind. Hinweis: es gibt FO(E)-Formeln $\varphi_n(x, y)$, die zum Ausdruck bringen, dass die Distanz zwischen x und y mindestens n ist.)

(ii) Die Klasse der Wohlordnungen $\mathfrak{A} = (A, <^{\mathfrak{A}})$ zur Symbolmenge $\sigma = \{<\}$ mit einem 2-stelligen Relationssymbol $<$ für die Ordnungsrelation.
(Eine lineare Ordnung ist eine Wohlordnung wenn es keine unendlichen absteigenden Folgen gibt; äquivalent: jede nicht-leere Teilmenge hat ein minimales Element.)

Auch ohne Kompaktheitssatz kann man z.B. zeigen, dass in der arithmetischen Struktur der komplexen Zahlen $\mathfrak{C} = (\mathbb{C}, +, \cdot, 0, 1)$ die durch die obere Halbebene gebildete Teilmenge, oder die Zahl $i \in \mathbb{C}$ nicht definierbar sind. Präzisieren und begründen Sie diese Behauptungen.

Übung 4 [Nichtstandardmodelle]
Wir betrachten ein Nichtstandardmodell der Arithmetik von

$$\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, +, \cdot, <, 0, 1)$$

in der üblichen Signatur σ der Arithmetik.

(a) Zur Existenz: Weisen Sie mit dem Kompaktheitssatz nach, dass die folgende Formelmenge Φ (mit freier Variable x) erfüllbar ist:

$$\Phi := \big\{\varphi \in \mathrm{FO}_0(\sigma) \colon \mathfrak{N} \models \varphi\big\} \cup \big\{\underbrace{1 + \cdots + 1}_{n} < x \colon n \in \mathbb{N}\big\}$$

(b) Zeigen Sie, dass jedes Modell $\mathfrak{N}^*, \lambda \models \Phi$ einen Anfangsabschnitt bezüglich der Ordnung $<^{\mathfrak{N}^*}$ besitzt, der zu $\mathfrak{N}$ isomorph ist.

(c) (Extra) Wie sieht in einem Modell $\mathfrak{N}^*, \lambda \models \Phi$ bezüglich der Ordnung $<^{\mathfrak{N}^*}$ die Nachbarschaft von 'Elementen endlicher Distanz' zu λ aus? Beschreiben Sie die Ordnung von $\mathfrak{N}^*$ indem Sie 'Elemente von endlicher Distanz' zu Äquivalenzklassen zusammenfassen.

(d) (Extra) Diskutieren Sie, inwiefern in einem Modell $\mathfrak{N}^*, \lambda \models \Phi$ das Induktionsaxiom verletzt ist, und inwiefern das nicht von der FO-Theorie von $\mathfrak{N}$ kontrolliert wird.
Betrachten und beweisen Sie die Behauptung, dass auch in $\mathfrak{N}^*$ gilt: jede nicht-leere FO(σ)-definierbare Teilmenge besitzt ein kleinstes Element bzgl $<^{\mathfrak{N}^*}$.