Logik und Grundlagen

Martin Otto
Vince Barany
Sommer 2012

Übung Nr.2

Übung 1 [Kompaktheit und Beweiskalküle]
Zum Aufwärmen: Wie folgt die Kompaktheitsaussage für eine Logik (wie AL(V)) unmittelbar aus der Existenz eines geeigneten vollständigen Beweiskalküls für diese Logik? Genauer: Welche Eigenschaften des Kalküls sind hierfür verantwortlich?

Übung 2 [AL-Kompaktheit]

(a) Beweisen Sie den Kompaktheitssatz für AL(V) mit abzählbarer Variablenmenge V direkt als Anwendung von Königs Lemma.

(b) Beweisen Sie Königs Lemma als direkte Anwendung des AL-Kompaktheitssatzes. Dazu beschreibt man die möglichen Auswahlen von Knoten längs eines unendlichen Pfades im vorgelegten Baum so durch eine unendliche Menge von AL-Bedingungen, dass jede endliche Teilmenge erfüllbar ist und aus der Erfüllbarkeit der gesamten Menge die Existenz eines unendlichen Pfades folgt. (Idee: eine Boolesche Variable für jede Entscheidung, einen Knoten aufzunehmen oder nicht; und geeignete Bedingungen, die Sackgassen verbieten.)

(c) Extra: Diskutieren Sie mögliche Beweise des AL-Kompaktheitssatzes für beliebige Variablenmengen V. Hinweis: Man benötigt stärkere Auswahlprinzipien (Auswahlaxiom, Zornsches Lemma).

Übung 3 [Endlichkeitssatz für Parkettierungen]
Ein Parkettierungs-System $\mathfrak{D} = (D, H, V)$ ist gegeben durch eine endliche Menge D von Kacheltypen und zwei Relationen $H, V \subseteq D \times D$, die beschreiben, wann zwei Kacheltypen horizontal bzw. vertikal nebeneinanderpassen.

Eine *Parkettierung* eines Gitters $\mathfrak{G} = (G, N_h, N_v)$ mit Knotenmenge G und horizontalen und vertikalen Nachfolgerrelationen $N_h, N_v \subseteq G \times G$ wird also beschrieben durch einen Homomorphismus $h\colon \mathfrak{G} \to \mathfrak{D}$ (warum?).

Weisen Sie nach, dass für ein endliches Parkettierungs-System $\mathfrak{D} = (D, H, V)$ stets äquivalent sind:

(i) Es existiert eine Parkettierung $h\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to D$ des unendlichen Gitters auf $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

(ii) Es existiert eine Parkettierung $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to D$ des unendlichen Gitters auf $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

(iii) Es existieren Parkettierungen $h\colon \{0, \ldots, n-1\} \times \{0, \ldots, n-1\} \to D$ des quadratischen $(n \times n)$-Gitters für beliebig große $n \in \mathbb{N}$.

AL Sequenzenkalkül K für AL mit $\neg, \vee, \bot$ (ohne $\wedge, \top$)

(V)	$\dfrac{}{\varphi; \varphi}$	$(\bot)$	$\dfrac{}{\bot; \varphi}$
(A)	$\dfrac{\Gamma; \varphi}{\Gamma, \Gamma'; \varphi}$		
$(\vee$A)	$\dfrac{\Gamma, \varphi_1; \varphi \qquad \Gamma, \varphi_2; \varphi}{\Gamma, (\varphi_1 \vee \varphi_2); \varphi}$	$(\vee$S)	$\dfrac{\Gamma; \varphi_i}{\Gamma; (\varphi_1 \vee \varphi_2)} \quad (i = 1, 2)$
(FU)	$\dfrac{\Gamma, \psi; \varphi \qquad \Gamma, \neg\psi; \varphi}{\Gamma; \varphi}$	(W)	$\dfrac{\Gamma, \neg\varphi; \psi \qquad \Gamma, \neg\varphi; \neg\psi}{\Gamma; \varphi}$

Übung 4 [Ableitungen]

(a) Zeigen Sie die semantische Korrektheit folgender Regeln und bilden Sie diese mit Hilfe der bekannten Schlussregeln nach (man spricht von abgeleiteten Regeln).

$$(\text{Abs}) \quad \frac{}{\varphi, \neg\varphi; \psi} \qquad\qquad (\text{Abs}') \quad \frac{\Gamma; \varphi}{\Gamma, \neg\varphi; \psi}$$

(b) Welche der folgenden Sequenzen sind allgemeingültig?

$$\neg(\varphi \vee \neg\psi), \neg\varphi; \neg\psi \qquad \neg\xi, \psi \vee \neg\varphi, \neg\psi \vee \xi; \neg\varphi$$

Geben Sie Ableitungen bzw. den semantischen Nachweis dass es sich nicht um allgemeingültige Sequenzen handelt.

Übung 5 [Schlussfiguren und abgeleitete Regeln]

(a) Weisen Sie die Korrektheit folgender Regeln nach indem Sie diese mittels bekannter Schlussregeln nachbilden (ableiten).

$$(\neg\neg\text{A}) \quad \frac{\Gamma, \varphi; \psi}{\Gamma, \neg\neg\varphi; \psi} \qquad\qquad (\neg\neg\text{S}) \quad \frac{\Gamma; \varphi}{\Gamma; \neg\neg\varphi}$$

$$(\text{W}'') \quad \frac{\Gamma, \varphi; \psi \qquad \Gamma, \varphi; \neg\psi}{\Gamma; \neg\varphi} \qquad\qquad (\neg\text{A}) \quad \frac{\Gamma; \varphi \vee \psi}{\Gamma, \neg\varphi; \psi}$$

Hinweis: Zur Ableitung neuer Regeln kann man die bereits abgeleiteten als Makros verwenden. Eine günstige Reihenfolge der Ableitungen wäre: ($\neg\neg$A), (W$''$), ($\neg\neg$S) und schließlich ($\neg$A). Man bemerke, dass ($\neg$A) eine Verschärfung von (Abs$'$) ist.

(b) Ergänzen Sie den Sequenzenkalkül um die natürlichen Regeln für $\top$ und $\wedge$.

(c) Weisen Sie die (semantische) Korrektheit der neuen Regeln nach.

(d) Eliminieren Sie die neuen Regeln anhand der alten syntaktisch, indem Sie die Umschreibung von $\varphi_1 \wedge \varphi_2$ zu $\neg(\neg\varphi_1 \vee \neg\varphi_2)$ und von $\top$ zu $\neg\bot$ zugrundelegen.

Hinweis: Man mache von den Regeln aus (a) Gebrauch (etwa von ($\neg$A) zu ($\wedge$A) und von (W$''$) und (Abs) zu ($\wedge$S)).