Martin Otto
Vince Barany

Übung Nr.1

Übung 1 [Lewis Carroll, aus: Symbolic Logic and the Game of Logic, 1896]

(a) Wieviele kombinatorisch mögliche Partitionen (Einteilungen in Wandergrüppchen) gibt es in der Aufgabe von Lewis Carroll? Dazu kann man etwa eine Rekursionsgleichung für die Anzahl $S(n, m)$ der Möglichkeiten, eine n-elementige Menge in m nicht-leere Teilmengen zu zerlegen, aufstellen.

(b) Lösen Sie die Aufgabe durch geschicktes logisches Schließen.

Axiome für boolesche Algebren $(B, \cdot, +, \,', 0, 1)$

BA1: $+$ und $\cdot$ assoziativ und kommutativ:

Für alle x, y: $(x + y) + z = x + (y + z)$ und $x + y = y + x$

$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ $\quad$ $x \cdot y = y \cdot x$

BA2: $+$ und $\cdot$ distributiv (zweifach):

Für alle x, y, z: $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

$x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$

BA3: 0 und 1 als neutrale Elemente:

Für alle x: $x \cdot 1 = x$ und $x + 0 = x$

BA4: Komplement:

$0 \neq 1$ und für alle x: $x \cdot x' = 0$ und $x + x' = 1$

Übung 2 [Boolesche Algebra]

Zum Aufwärmen: Weisen Sie nach, dass neben der Standard-BA auch jede Potenzmengenalgebra $(\mathcal{P}(M), \cap, \cup, ^-, \emptyset, M)$ die Axiome für boolesche Algebren erfüllt.

Präzisieren Sie eine schwache Dualitäts-Aussage auf der Basis dass die Axiome unter Vertauschung von $+/\cdot$ und $0/1$ invariant sind. (Siehe (b) zur eigentlichen Dualität via Negation.)

(a) Leiten Sie aus den obigen Axiomen diese Folgerungen her (die gelegentlich in erweiterten Axiomensystemen für Boolesche Algebren schon gegeben sind):

- (i) Idempotenz: für alle x gilt $x \cdot x = x$ und $x + x = x$.
- (ii) Für alle x gilt: $x + 1 = 1$ und $x \cdot 0 = 0$.
- (iii) Absorption: für alle x, y gilt $x \cdot (x + y) = x = x + x \cdot y$.
- (iv) Durch die beiden Bedingungen $x \cdot x' = 0$ und $x + x' = 1$ ist zu jedem x das Element x' eindeutig bestimmt.
- (v) Involution: für alle x ist $(x')' = x$.
- (vi) De Morgan: für alle x, y gilt $(x + y)' = x' \cdot y'$ und $(x \cdot y)' = x' + y'$.

(b) Benutzen Sie allein die Axiome für boolesche Algebren und deren Folgerungen aus (a), um folgende Behauptungen nachzuweisen.

- (i) In jeder booleschen Algebra gilt (für alle x, y): $x \cdot y = x \Leftrightarrow x \cdot y' = 0$.
- (ii) In jeder booleschen Algebra wird durch $x \leqslant y :\Leftrightarrow x \cdot y = x$ eine partielle Ordung mit minimalem Element 0 und maximalem Element 1 definiert.
- (iii) (Dualität) Für jede boolesche Algebra $\mathfrak{B} = (B, \cdot, +, ', 0, 1)$ ist die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} \delta\colon B & \longrightarrow & B \\ x & \longmapsto & \delta(x) := x' \end{array}$$

bijektiv und erfüllt für alle $x, y \in B$:

$$\delta(x + y) = \delta(x) \cdot \delta(y),\ \delta(x \cdot y) = \delta(x) + \delta(y),$$

$$\delta(x') = (\delta(x))', \delta(0) = 1, \delta(1) = 0,\ \delta(x) \leqslant \delta(y) \Leftrightarrow y \leqslant x.$$

Übung 3 [Boolesche Algebra]
Sei $\mathfrak{B} = (B, \cdot, +, ', 0, 1)$ eine endliche boolesche Algebra. Ein Element $a \in B$ heißt *Atom* falls $a \neq 0$ und für alle $b \in B$ gilt dass $b \leqslant a$ genau für $b = 0$ und $b = a$ (d.h., Atome sind die minimalen Elemente oberhalb der 0). Sei $A \subseteq B$ die Menge der Atome in $\mathfrak{B}$.

(a) Zeigen Sie dass es für jedes $b \in B \setminus \{0\}$ mindestens ein Atom a mit $a \leqslant b$ gibt.

(b) Zeigen Sie dass die Abbildung $f\colon B \longrightarrow \mathcal{P}(A), b \mapsto f(b) := \{a \in A\colon a \leqslant b\}$ ein Isomorphismus zwischen $\mathfrak{B}$ und der Potenzmengen-BA über A ist.

(c) Was sagt dies über die möglichen Kardinalitäten endlicher boolescher Algebren aus?

Bemerkung: Auch jede unendliche BA ist isomorph zu einer Unteralgebra einer Potenzmengenalgebra; dafür braucht man aber stärkere kombinatorische Konzepte und Hilfsmittel wie Ultrafilter und das Auswahlaxiom (vgl. Satz von Stone).
Muss es auch in unendlichen booleschen Algebren stets Atome geben?

Übung 4 [Boolesche Algebra: Extra]

(a) Zeigen Sie dass jede Unteralgebra einer booleschen Algebra eine boolesche Algebra ist; dass jede endlich erzeugte Unteralgebra einer booleschen Algebra endlich ist; und dass eine Struktur $(B, \cdot, +, ', 0, 1)$ eine boolesche Algebra ist, wenn jede ihrer endlich erzeugten Unterstrukturen eine boolesche Algebra ist.

(b) Zeigen Sie dass jedes direkte Produkt von zwei booleschen Algebren wieder eine boolesche Algebra ist.

(c) Zeigen Sie dass jede Potenzmengen-BA über einer endlichen Menge M isomorph ist zu einer direkten Potenz der Standard-BA $\mathbb{B}$.

Aus diesen Beobachtungen kann man zusammen mit der letzten Übung schließen, dass die Axiome die Gleichungstheorie *aller* booleschen Algebren und *jeder* booleschen Algebra axiomatisieren, und dass dies die Gleichungstheorie der Standard-BA $\mathbb{B}$ its.

15.

Six friends, and their six wives, are staying in the same hotel; and they all walk out daily, in parties of various size and composition. To ensure variety in these daily walks, they have agreed to observe the following Rules:—

(1) If Acres is with (i.e. is in the same party with) his wife, and Barry with his, and Eden with Mrs. Hall, Cole must be with Mrs. Dix;

(2) If Acres is with his wife, and Hall with his, and Barry with Mrs. Cole, Dix must *not* be with Mrs. Eden;

(3) If Cole and Dix and their wives are all in the same party, and Acres *not* with Mrs. Barry, Eden must *not* be with Mrs. Hall;

(4) If Acres is with his wife, and Dix with his, and Barry *not* with Mrs. Cole, Eden must be with Mrs. Hall;

(5) If Eden is with his wife, and Hall with his, and Cole with Mrs. Dix, Acres must *not* be with Mrs. Barry;

(6) If Barry and Cole and their wives are all in the same party, and Eden *not* with Mrs. Hall, Dix must be with Mrs. Eden.

The Problem is to prove that there must be, every day, at least one married couple who are not in the same party.